



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Estatística e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

# **Novas medidas de bondade de ajuste para a família Kumaraswamy-G: uma aplicação a dados hidrológicos**

**Caio Cesar França dos Santos**

**Recife-PE, Fevereiro de 2021**

Caio Cesar França dos Santos

**Novas medidas de bondade de ajuste para a família  
Kumaraswamy-G: uma aplicação a dados hidrológicos**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE (área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Departamento de Estatística e Informática - DEINFO

Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva

Coorientador: Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos

Recife-PE

Fevereiro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

Santos, Caio Cesar França dos Santos  
Caio Cesar França dos Santos Santos. - 2021.  
França dos Santos. - 2021.  
n 58 f. : il.

Orientador: Frank Sinatra Gomes da Silva.  
Coorientador: Josimar Mendes de Vasconcelos.  
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, 2021.

1. Família Kw-G. 2. Transformada de Mellin. 3. Estatística do tipo-II. 4. Momentos Ponderados de Probabilidade..  
5. Estatística T2 de Hotelling.. I. Silva, Frank Sinatra Gomes da, orient. II. Vasconcelos, Josimar Mendes de, coorient. III.  
Título

Caio Cesar França dos Santos

**Novas medidas de bondade de ajuste para a família  
Kumaraswamy-G: uma aplicação a dados hidrológicos**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE (área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada.

---

**Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**  
Orientador

---

**Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos**  
Examinador interno

---

**Dr. Jeremias da Silva Leão**  
Examinador externo

Recife-PE

*A Krishna e Lindalva (In memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, amigos e colegas de departamento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento: 88882.461697/2019-01.

*“Os idiotas vão tomar conta do mundo;  
não pela capacidade, mas pela quantidade.  
Eles são muitos.”  
(Nelson Rodrigues)*

# Resumo

Neste trabalho, propomos novas medidas de bondade de ajuste para modelos Kumaraswamy generalizados (Kw-G) baseadas na Transformada de Mellin (TM) e nos Momentos Ponderados de Probabilidade (MPP). Combinamos MPP e TM para fornecer novas ferramentas quantitativas para a escolha de modelos dentro da família Kw-G. Primeiro, derivamos MPP para as distribuições Exp-Weibull, Exp-Fréchet, Exp-log-logística e Exp-Uniforme. Depois, fornecemos expressões para a TM associada à família Kw-G e alguns de seus casos especiais: em particular, as distribuições Kumaraswamy-Weibull, Kumaraswamy-Fréchet, Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy. Posteriormente, fazemos uma combinação entre a estatística  $T^2$  de Hotelling e o método Delta multivariado para testar hipóteses envolvendo cumulantes do tipo II. Finalmente, aplicamos as medidas de bondade de ajuste propostas em quatro conjuntos de dados reais em contextos da hidrologia.

**Palavras-chaves:** Família Kw-G. Transformada de Mellin. Estatística do tipo-II. Momentos Ponderados de Probabilidade. Estatística  $T^2$  de Hotelling.



# Abstract

In this essay, we propose GoF measures for generalized Kumaraswamy (Kw-G) models based on the Mellin Transform (MT) and Probability Weighted Moments (PWM). We combine PWMs and the MT in order to furnish new GoF quantitative tools for choosing models within the Kw-G class. First, we derive PWMs for the Exp-Weibull, Exp-Fréchet, Exp-log-logistic and Exp-Uniform distributions. After, we provide expressions for the MT associated with the Kw-G family and some of its special cases: in particular, Kumaraswamy-Weibull, Kumaraswamy-Fréchet, Kumaraswamy-log-logistic and Kumaraswamy distributions. Subsequently, we make a combination between the Hotelling's  $T^2$  statistic and the multivariate Delta method to test hypotheses involving second kind cumulants. Finally, we apply the proposed GoF measures on four real data sets applications in hydrology contexts.

**Keywords:** Family Kw-G. Mellin transform. Second-kind statistic. Probability weighted moments. Hotelling's  $T^2$  statistic.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Densidade da Kumaraswamy . . . . .	4
Figura 2 – Densidade da Kw-Weibull . . . . .	5
Figura 3 – Densidade da Kw-Fréchet . . . . .	7
Figura 4 – Densidade da Kw-log-logística . . . . .	8
Figura 5 – Diagrama de LC, $\tilde{\kappa}_3$ e $\tilde{\kappa}_2$ , para Kw-W, Kw-F, Kw-LL e Kw. . . . .	20

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Sub-modelos da Kw-W . . . . .	5
Tabela 2 – Fda e Quantílica das nossas distribuições-base exponenciadas . . . . .	11
Tabela 3 – Transformada de Mellin para as distribuições-base consideradas. . . . .	15
Tabela 4 – Log-cumulantes dos nossos modelos considerados . . . . .	19
Tabela 5 – Análise descritiva e LC's ( $\widehat{\kappa}_2$ e $\widehat{\kappa}_3$ ) para nossos conjuntos de dados . . . . .	26
Tabela 6 – Estatística $T^2$ de Hotelling e $p$ -valor (em parênteses) . . . . .	27

# Lista de abreviaturas e siglas

AIC	Critério de Informação de Akaike
BIC	Critério de Informação Bayesiano
Exp-G	Classe Exponenciada Generalizada
fc	Função característica
fda	Função de distribuição acumulada
fdp	Função densidade de probabilidade
GEV	Distribuição Valor Extremo Generalizado
Kw	Distribuição Kumaraswamy
Kw-F	Distribuição Kumaraswamy-Fréchet
Kw-G	Classe Kumaraswamy Generalizada
Kw-LL	Distribuição Kumaraswamy-log-logística
Kw-W	Distribuição Kumaraswamy-Weibull
LC	Log-Cumulantes
LM	Log-Momentos
MLC	Matriz Log-Cumulantes
MPP	Momentos Ponderados de Probabilidade
MV	Máxima Verossimilhança
TM	Transformada de Mellin

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>A família de distribuições Kumaraswamy-G</b>	<b>3</b>
2.1.1	Kumaraswamy-Weibull	4
2.1.2	Kumaraswamy-Fréchet	6
2.1.3	Kumaraswamy-log-logística	7
<b>2.2</b>	<b>Transformada de Mellin</b>	<b>9</b>
<b>2.3</b>	<b>Momentos Ponderados de Probabilidade - MPP</b>	<b>10</b>
<b>2.4</b>	<b>Os Log-cumulantes</b>	<b>12</b>
<b>2.5</b>	<b>Estatística <math>T^2</math> de Hotelling</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMADA DE MELLIN COMO UM CASO ESPECIAL DOS MPP: ESTATÍSTICAS DO TIPO II PARA MODELOS KUMARASWAMY-G</b>	<b>14</b>
<b>3.1</b>	<b>MPP de algumas distribuições-base</b>	<b>15</b>
<b>3.2</b>	<b>Diagramas de Log-cumulantes</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>NOVO TESTE DE BONDADE DE AJUSTE PARA A FAMÍLIA KW-G</b>	<b>21</b>
<b>4.1</b>	<b>Estatísticas <math>T^2</math> para os modelos selecionados</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO</b>	<b>26</b>
<b>5.1</b>	<b>Conjuntos de dados e suas estatísticas descritivas</b>	<b>26</b>
<b>5.2</b>	<b>Estimativas e p-valores</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>28</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>29</b>
	<b>APÊNDICE A –</b>	<b>35</b>
<b>A.1</b>	<b>Distribuição Kw-Weibull</b>	<b>35</b>
A.1.1	Log-verossimilhança	35
A.1.2	Vetor escore	35
A.1.3	Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$	35
A.1.4	Matriz de Informação Observada e sua inversa	35
A.1.5	Matriz de log-cumulantes	36

A.1.6	Matriz de covariância assintótica e sua inversa . . . . .	36
A.1.7	Estatística $T^2$ de Hotelling . . . . .	37
<b>A.2</b>	<b>Distribuição Kw-Fréchet . . . . .</b>	<b>37</b>
A.2.1	Log-verossimilhança . . . . .	37
A.2.2	Vetor escore . . . . .	37
A.2.3	Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$ . . . . .	37
A.2.4	Matriz de Informação Observada e sua inversa . . . . .	38
A.2.5	Matriz de log-cumulantes . . . . .	38
A.2.6	Matriz de covariância assintótica e sua inversa . . . . .	38
A.2.7	Estatística $T^2$ de Hotelling . . . . .	39
<b>A.3</b>	<b>Distribuição Kw-Log-logística . . . . .</b>	<b>39</b>
A.3.1	Log-verossimilhança . . . . .	39
A.3.2	Vetor escore . . . . .	39
A.3.3	Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$ . . . . .	39
A.3.4	Matriz de Informação Observada e sua inversa . . . . .	39
A.3.5	Matriz de log-cumulantes . . . . .	40
A.3.6	Matriz de covariância assintótica e sua inversa . . . . .	41
A.3.7	Estatística $T^2$ de Hotelling . . . . .	41
<b>A.4</b>	<b>Distribuição Kumaraswamy . . . . .</b>	<b>41</b>
A.4.1	Log-verossimilhança . . . . .	41
A.4.2	Vetor escore . . . . .	41
A.4.3	Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$ . . . . .	42
A.4.4	Matriz de Informação Observada e sua inversa . . . . .	42
A.4.5	Matriz de log-cumulantes . . . . .	42
A.4.6	Matriz de covariância assintótica e sua inversa . . . . .	42
A.4.7	Estatística $T^2$ de Hotelling . . . . .	43
	<b>APÊNDICE B – CÁLCULO DAS ESTATÍSTICAS . . . . .</b>	<b>44</b>

# 1 Introdução

Fenômenos hidrológicos que ocorrem sob incerteza frequentemente são modelados por distribuições de probabilidade contínuas, tais como a Weibull (SINGH, 1987; CLARKE, 2002), a Fréchet (RAMOS et al., 2019), a Log-logística (ASHKAR; MAHDI, 2006) e a Kumaraswamy (NADARAJAH, 2008). Nos últimos anos, a busca por novos modelos capazes de explicar melhor os dados com domínio  $\mathbb{R}_+$  têm gerado uma série de novas famílias ou classes de distribuições. Como resultado, podemos destacar: a classe Marshall-Olkin-G (MARSHALL; OLKIN, 1997), a família Exponencializada (GUPTA; GUPTA; GUPTA, 1998; GUPTA; KUNDU, 1999), a Beta-G (EUGENE; LEE; FAMOYE, 2002), a Gamma-G (ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009; RISTIC; BALAKRISHNAN, 2012) e a família T-X (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013).

Embora seja crescente o número de novas distribuições nos últimos anos, apenas timidamente novas medidas de bondade de ajuste tem sido propostas para as distribuições recentes, afim de se criar novos critérios de seleção de modelos. Em Chen e Balakrishnan (1995) a abordagem de seleção de modelos se baseia nas estatísticas de Anderson-Darling e Cramér-von Mises, que por sua vez, se baseiam em medidas de distância entre a função de distribuição acumulada (fda) e função de distribuição empírica. Também baseado nessas medidas de distância entre as funções de distribuição, Viveros e Balakrishnan (1994) compara distribuições de sobrevivência para amostras progressivamente censuradas. Em Pakyari e Balakrishnan (2012), é estendido o resultado apresentado em Viveros e Balakrishnan (1994), abrangendo diversas distribuições de sobrevivência, e novos testes modificados de Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises e Anderson-Darling para amostras progressivamente censuradas são apresentados.

Tomando uma abordagem diferente, Linhart e Zucchini (1986) propôs medidas de informação teóricas considerando os critérios AIC e BIC (MCQUARRIE; TSAI, 1998) para métodos de seleção de modelos. Um critério alternativo de medida de bondade de ajuste foi dado por Pearson (1895) em seu sistema de diagramas para seleção de modelos, que são baseados em medidas de assimetria e curtose (JOHNSON; KOTZ; BALAKRISHNAN, 1994). Delignon, Garello e Hillion (1997) e Vogel e Fennessey (1993) aplicaram tais diagramas para dados de imagens SAR e hidrológicos, respectivamente. Andreev, Kanto e Malo (2007) aplicaram os diagramas de Pearson para selecionar modelos aplicados a séries diárias, mensais e anuais no mercado de commodities e outras variáveis macroeconômicas. Chabert e Tourneret (2011) introduzem a generalização dos diagramas de Pearson para vetores aleatórios bidimensionais. Nagahara (2004) examinou o problema de derivar medidas

de bondade de ajuste para distribuições multivariadas não-normais pelo sistema de Pearson.

Contudo, [Nicolas e Anfinen \(2002\)](#) observaram que o diagrama de Pearson pode não ser tão bem adequado para variáveis positivas. Em [Nicolas e Maruani \(2000\)](#) e [Nicolas e Anfinen \(2002\)](#) apresentou-se uma alternativa ao propor a aplicação da transformada de Mellin (TM) como uma alternativa à função característica usual, gerando a denominada segunda função característica do tipo II e subsequentemente definiu-se os momentos do tipo II (ou log-momentos) e os cumulantes do tipo II (ou log-cumulantes). Ainda, estes autores apresentaram o diagrama de log-cumulantes (LC), que plota os LC's,  $\tilde{\kappa}_3$  contra  $\tilde{\kappa}_2$ , como alternativa gráfica para a comparação dos modelos. O diagrama de LC oferece algumas vantagens sobre o diagrama de Pearson. Além de ser adequado para variáveis aleatórias positivas, sua implementação computacional é mais direta e também capta a flexibilidade da distribuição no sentido de assimetria e curtose ([LI et al., 2011](#)). Uma descrição detalhada da Transformada de Mellin é dada em [Nicolas e Anfinen \(2002\)](#) e [Li et al. \(2011\)](#). Tais diagramas foram se mostrando relevantes para comparações qualitativas e quantitativas em distribuições não-encaixadas para dados SAR e PolSAR ([LI et al., 2011](#); [ANFINSEN](#); [ELTOFT, 2011](#); [KHAN](#); [GUIDA, 2013](#); [KRYLOV et al., 2013](#); [DENG](#); [LÓPEZ-MARTÍNEZ, 2016](#)). Em [Anfinen, Doulgeris e Eltoft \(2011\)](#) é fornecido testes simples e compostos de ajuste de bondade, aplicados a dados PolSAR. Em [Tung \(1990\)](#), é proposto a aplicação da TM para problemas hidrológicos/hidráulicos.

Neste trabalho, propomos a combinação dos Momentos Ponderados de Probabilidade (MPP) e a transformada de Mellin (TM) para fornecer novas medidas de bondade de ajuste para seleção de modelos na família Kumaraswamy-G (Kw-G). Introduzimos uma expressão geral da TM para distribuições pertencentes a esta classe. Para mostrar sua aplicabilidade, separamos quatro modelos para investigação: Kw-Weibull ([CORDEIRO; ORTEGA; NADARAJAH, 2010](#)), Kw-Fréchet ([MANSOUR et al., 2018](#)), Kw-Log-logística ([SANTANA et al., 2012](#)) e a própria Kumaraswamy ([KUMARASWAMY, 1980](#)). Tais modelos são obtidos substituindo-se as distribuições-base Weibull, Fréchet, Log-logística e Uniforme-padrão respectivamente no gerador Kw-G. Introduzimos expressões de forma fechada do MPP para essas quatro distribuições-base em sua forma exponenciada ( $G^a(x)$  com  $a > 0$ ) como em [Gupta e Kundu \(1999\)](#). Além disso, utilizamos o método Delta multivariado para obter estatísticas  $T^2$  de Hotelling para o teste de hipóteses, que envolve os log-cumulantes. Finalmente, quatro banco de dados reais no contexto da hidrologia são submetidos a nossa metodologia proposta.



## 2 Revisão de Literatura

### 2.1 A família de distribuições Kumaraswamy-G

A família Kumaraswamy-G (Kw-G) de distribuições foi proposta por [Cordeiro e Castro \(2011\)](#), abrigando uma diversidade de modelos que podem ser utilizados em estudos nas áreas de confiabilidade, análise de sobrevivência e hidrologia, sendo definida como a seguir.

Seja a distribuição-base  $G(x; \boldsymbol{\tau})$  a fda de uma variável aleatória contínua  $X$  com vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\tau}$ . A Kw-G estende a distribuição-base em uma outra distribuição  $F(x)$  de acordo com:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x; a, b, \boldsymbol{\tau}) \\ &= 1 - \{1 - G(x; \boldsymbol{\tau})^a\}^b, \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros de forma.

A função densidade de probabilidade (fdp) associada a (2.1) é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x; a, b, \boldsymbol{\tau}) \\ &= a b g(x; \boldsymbol{\tau}) G(x; \boldsymbol{\tau})^{a-1} [1 - G(x; \boldsymbol{\tau})^a]^{b-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $g(x; \boldsymbol{\tau}) = dG(x; \boldsymbol{\tau})/dx$  é a fdp da distribuição-base.

Sua expressão advém da distribuição Kumaraswamy ([KUMARASWAMY, 1980](#)), que é definida como

$$f(x) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1} \quad \text{e} \quad F(x) = 1 - (1-x^a)^b,$$

para  $0 < x < 1$  e  $a > 0$  e  $b > 0$  como parâmetros de forma.

Esta distribuição recebeu um interesse considerável em hidrologia e áreas relacionadas ([NADARAJAH, 2008](#)). Para mais detalhes sobre as propriedades da Kumaraswamy, ver [Jones \(2009\)](#), [Lemonte \(2011\)](#), [Mitnik \(2013\)](#), [Wang, Wang e Yu \(2017\)](#).

A Figura 1 apresenta as várias formas assumidas por esta distribuição.

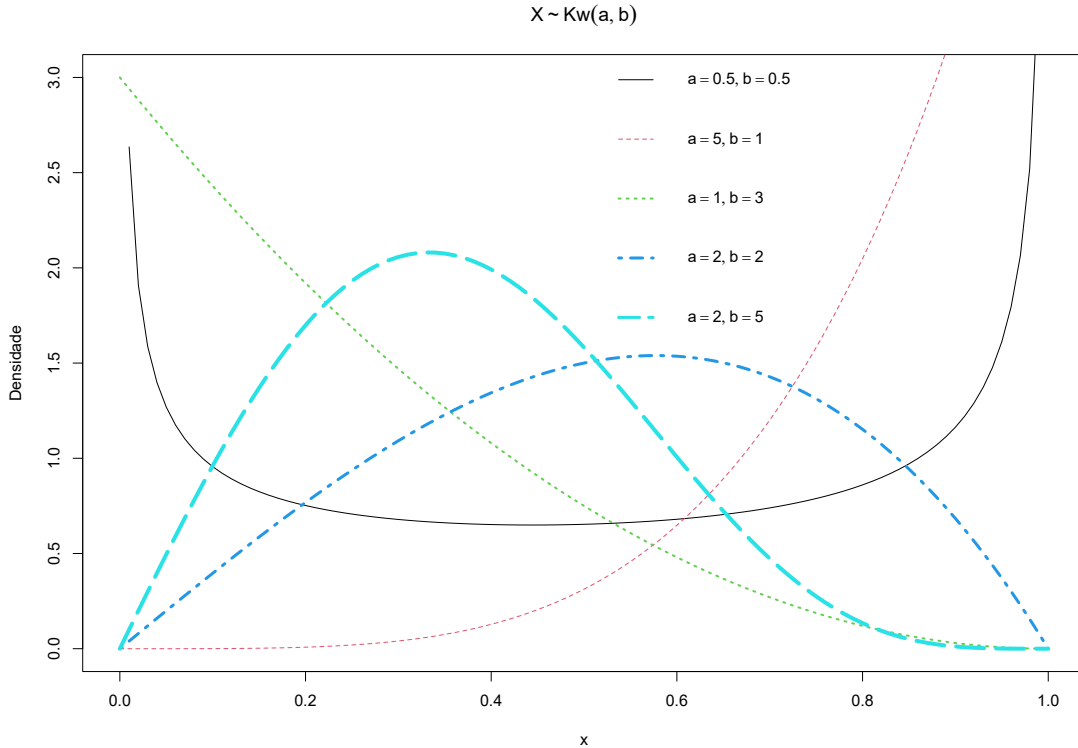


Figura 1 – Densidade da Kumaraswamy

Nas próximas subseções, separamos mais três outros casos particulares da família Kumaraswamy-G, para explorarmos e derivarmos medidas de bondade de ajuste.

### 2.1.1 Kumaraswamy-Weibull

A distribuição Kumaraswamy-Weibull foi proposta por [Cordeiro, Ortega e Nadarajah \(2010\)](#) com a utilização do modelo Weibull como distribuição-base no gerador Kw-G. Tal distribuição, abriga uma série de sub-modelos, dos quais podemos destacar a Weibull exponenciada, a Rayleigh exponenciada e a Exponencial exponenciada. Foi empregada neste artigo, na área de confiabilidade, para analisar dados de tempo de falha.

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{a b \alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right]^{a-1} \left[1 - \left\{1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right\}^a\right]^{b-1},$$

com  $a, b, \alpha > 0$  como parâmetros de forma e  $\lambda > 0$  como parâmetro de escala.

Sua função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(x) = 1 - \left[ 1 - \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha} \right\}^{a-1} \right]^b.$$

A Tabela 1 abaixo apresenta alguns sub-casos da nossa distribuição.

Tabela 1 – Sub-modelos da Kw-W

Modelos	$\lambda$	$\alpha$	$a$	$b$
Kw-exponencial	-	1	-	-
Kw-Rayleigh	-	2	-	-
Weibull exponenciada	-	-	-	1
Exponencial exponenciada	-	1	-	1
Weibull	-	-	1	1
Rayleigh	-	2	1	1

A Figura 2 mostra algumas formas assumidas pela Kw-Weibull de acordo com alguns valores de parâmetros.

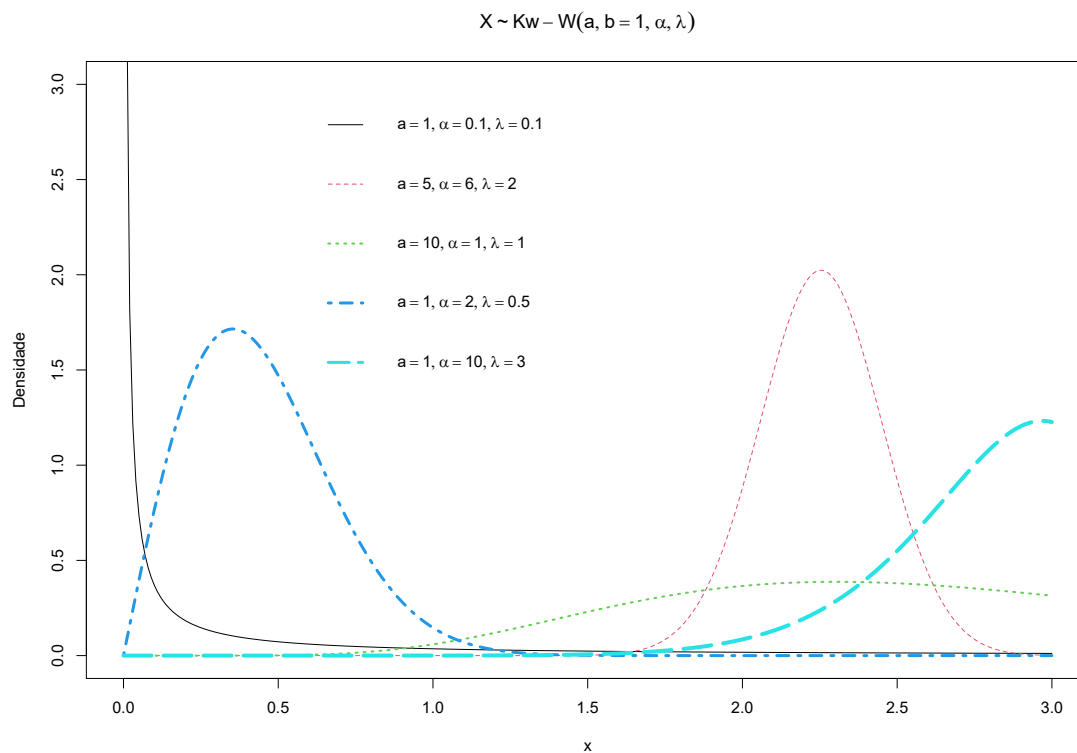


Figura 2 – Densidade da Kw-Weibull

Sua função quantílica é dada por

$$Q(u) = \lambda \left[ -\log \left\{ 1 - \left[ 1 - (1 - u)^{1/b} \right]^{1/a} \right\} \right]^{1/\alpha}$$

em que  $u \sim U(0, 1)$ .

A função taxa de falha é dada por

$$h(x) = \frac{\frac{ab\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right]^{a-1}}{1 - \left\{1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right\}^a}.$$

### 2.1.2 Kumaraswamy-Fréchet

A distribuição Fréchet tem aplicações que vão desde testes de vida acelerados a terremotos, inundações, corridas de cavalos, chuvas, velocidades do vento, ondas do mar, entre outros (MANSOUR et al., 2018). Para mais detalhes sobre a Fréchet e suas aplicações, ver Kotz e Nadarajah (2000), Barreto-Souza, Cordeiro e Simas (2011) e Krishna, Jose e Ristić (2013).

O modelo Kumaraswamy-Fréchet foi proposta por Mead (2014) como uma generalização da Fréchet através do gerador Kw-G. Mead (2014) propôs sua aplicação na área de confiabilidade para modelar dados de resistência de componentes. Tal distribuição generaliza alguns modelos famosos tais como a Exponencial inversa, a Gumbel, a Rayleigh inversa e a própria Fréchet (MANSOUR et al., 2018).

Sua densidade é escrita como

$$f(x) = \frac{ab\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}} \left[1 - e^{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}}\right]^{b-1},$$

com  $a, b, \alpha > 0$  como parâmetros de forma e  $\lambda > 0$  como parâmetro de escala.

Sua acumulada é dada por

$$F(x) = 1 - \left[1 - e^{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}}\right]^b.$$

Sua função quantílica é dada por:

$$Q(u) = \lambda \left[ -\log \left\{ 1 - (1 - u)^{1/b} \right\}^{1/a} \right]^{1/\alpha}$$

em que  $u \sim U(0, 1)$ .

Sua função taxa de falha é dada por

$$h(x) = \frac{\frac{ab\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}}}{1 - e^{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}}}.$$

A figura 3 mostra algumas formas assumidas pela Kw-Fréchet de acordo com alguns valores de parâmetros.

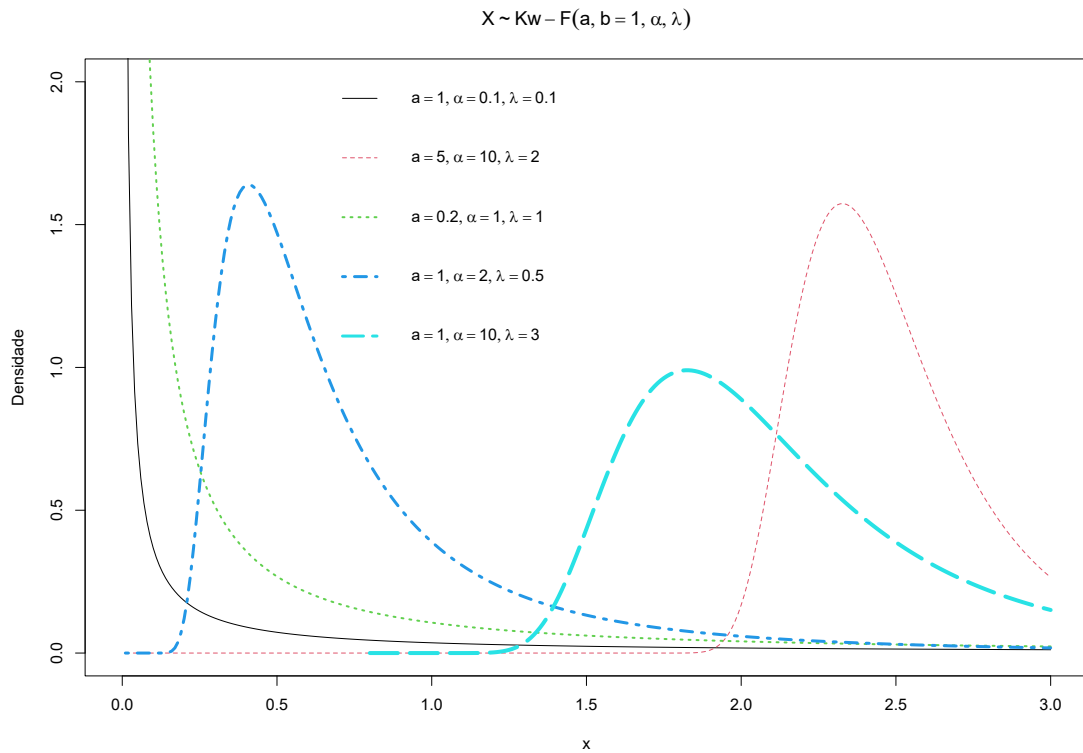


Figura 3 – Densidade da Kw-Fréchet

### 2.1.3 Kumaraswamy-log-logística

A distribuição Kumaraswamy-log-logística é obtida ao colocar a distribuição-base log-logística no gerador Kw-G. Suas propriedades foram primeiramente estudadas por [Santana et al. \(2012\)](#). Sua fdp é dada da forma:

$$f(x) = \frac{a b \alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} \left\{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right\}^{-(a+1)} \left[1 - \left\{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right\}^{-a}\right]^{b-1}.$$

A Figura 4 mostra algumas formas assumidas pela Kw-log-logística de acordo com alguns valores de parâmetros.

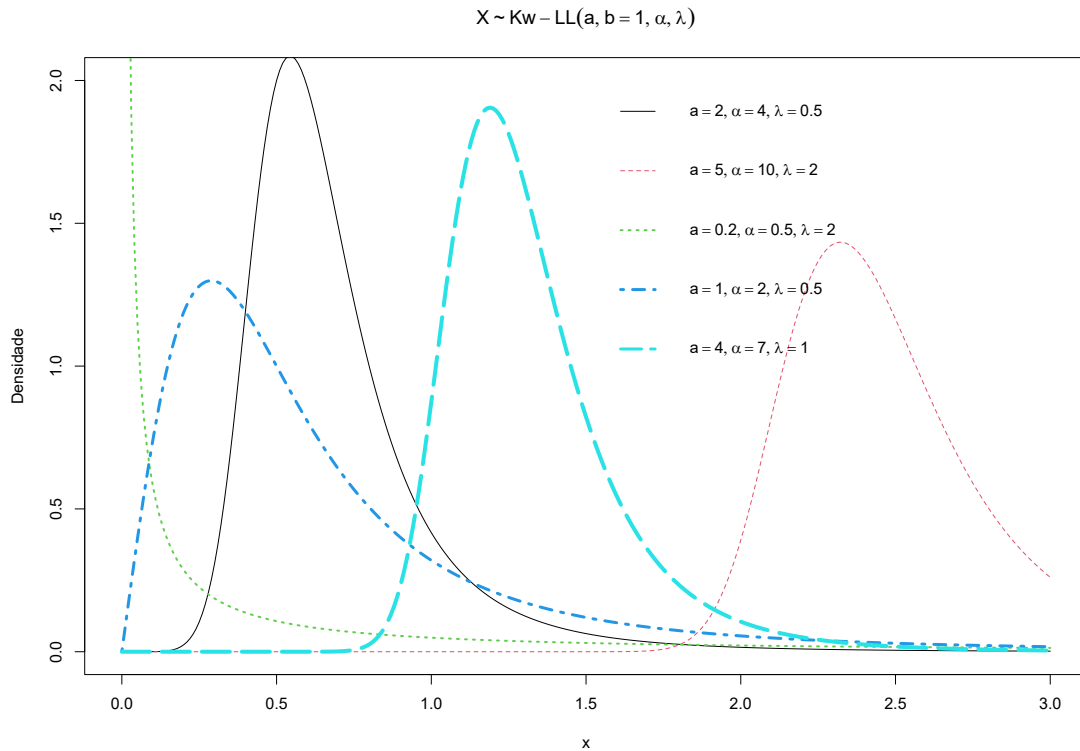


Figura 4 – Densidade da Kw-log-logística

As propriedades da distribuição log-logística a tornam uma alternativa atraente para as distribuições log-normal e Weibull na análise de dados de sobrevivência (COLLETT, 2015). Algumas aplicações da distribuição log-logística são discutidas em economia para modelar a riqueza e a renda (KLEIBER; KOTZ, 2003) e na hidrologia para modelar fluxos de rio (ASHKAR; MAHDI, 2006). Collett (2015) sugeriu a distribuição log-logística para modelar o tempo após um transplante de coração.

As distribuições log-logística e log-logística exponenciada são os sub-casos mais famosos da expressão acima, quando  $a = b = 1$  e  $b = 1$ , respectivamente. Se  $a = 1$ , nós obtemos o modelo Burr XII.

Sua fda é dada da forma

$$F(x) = 1 - \left[ 1 - \left\{ 1 + \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{-\alpha} \right\}^{-a} \right]^b$$

Sua quantílica é dada por

$$Q(u) = \lambda \left\{ \left[ 1 - \left\{ 1 - (1 - u)^{1/b} \right\}^{1/a} \right]^{-1/\alpha} - 1 \right\}$$

em que  $u \sim U(0, 1)$ .

Sua função taxa de falha é dada por

$$h(x) = \frac{\frac{ab\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} \left\{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right\}^{-(\alpha+1)}}{1 - \left\{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right\}^{-a}}.$$

## 2.2 Transformada de Mellin

Usualmente a distribuição de probabilidade pode ser escrita por meio de sua função característica (fc) do tipo I, que é uma transformada de Fourier sobre a fdp. Seja  $X$  uma variável aleatória com fda  $F(x)$ . Então, sua fc,  $\Phi_X(t)$ , é definida como (BILINGSLEY, 2016, p. 342):

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ .

Contudo, há casos em que a função característica é analiticamente intratável. Para contornar essa dificuldade, Colombo (1959) sugeriu a Transformada de Mellin (TM) como alternativa. Em Nicolas e Anfinzen (2002) é introduzida estatísticas do tipo II, que são versões de estatísticas clássicas sendo que baseadas na TM para analisar distribuições sobre  $\mathbb{R}_+$ .

Seja  $X \in \mathbb{R}_+$  variável aleatória com fda  $F(x)$ . Então a primeira fc do tipo II é definida por meio da Transformada de Mellin como:

$$\phi_X(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} dF(x) = E(X^{s-1}), \quad (2.3)$$

em que  $s \in \mathbb{C}$  é a variável complexa (NICOLAS; ANFINSEN, 2002).

Similarmente a fc, a TM também possui inversa. Se  $\phi_X(s)$  está bem definida, podemos deduzir a fdp através da seguinte relação (COLOMBO, 1959; NICOLAS; ANFINSEN, 2002)

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} x^{-s} \phi_X(s) ds.$$

Se  $F(x)$  é uma fda, a fc do tipo II satisfaz  $\phi_X(1) = 1$ .

Nicolas e Anfinen (2002) introduziram então a segunda função característica do tipo II definida como sendo o logaritmo natural de  $\phi_X(s)$ :

$$\psi_X(s) = \log [\phi_X(s)]. \quad (2.4)$$

No próximo capítulo, mostraremos que a TM da família Kumaraswamy-G pode ser obtida diretamente dos MPP das distribuições-base na forma exponenciada definida por Gupta e Kundu (1999). Para isso, a seguir, revisaremos os conceitos dos MPP.

## 2.3 Momentos Ponderados de Probabilidade - MPP

Os Momentos Ponderados de Probabilidade foi introduzido por Greenwood et al. (1979) e consiste de uma generalização dos momentos usuais para distribuições de probabilidade. Em termos de estimação, os MPP podem fornecer estimadores de forma fechada quando estimadores clássicos, tais como Máxima Verossimilhança e Método dos Momentos, são analiticamente intratáveis (GREENWOOD et al., 1979; HAKTANIR; BOZDUMAN, 1995; WHALEN; SAVAGE; JEONG, 2004).

O MPP é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l,j,k} &= \mathbb{E} \left\{ X^l F(X)^j [1 - F(X)]^k \right\} \\ &= \int_0^1 Q[F(x)]^l F(x)^j [1 - F(x)]^k dF(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $l, j, k \in \mathbb{R}$  e  $Q(\cdot)$  representa a função quantílica de  $F(\cdot)$ . Note que (2.5) generaliza os momentos usuais, que são obtidos tomando  $l \in \mathbb{Z}_+$  e  $j = k = 0$  ( $\mathcal{M}_{l,0,0}$ ). Se  $\mathcal{M}_{l,0,0}$  é finito, então  $\mathcal{M}_{l,j,k}$  está bem definido para todo  $j, k \in \mathbb{R}_+$  (GREENWOOD et al., 1979).

Suponha que  $j, k \in \mathbb{R}_+$ , então pelo teorema binomial, temos:

$$\mathcal{M}_{l,0,k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \mathcal{M}_{l,j,0} \quad (2.6)$$

e

$$\mathcal{M}_{l,j,0} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k \mathcal{M}_{l,0,k}, \quad (2.7)$$

onde se a expressão (5) existe e  $X$  é contínua, então  $\mathcal{M}_{l,0,k}$  existe, O mesmo é válido para a expressão (6). Os MPP's são proporcionais a  $\mathbb{E}(X_{j+1:j+k+1}^l)$  quando  $l, j, k \in \mathbb{R}_+$ , o  $l$ -ésimo momento da  $(j+1)$ -ésima estatística de ordem de amostra de tamanho  $(j+k+1)$  é dado por

$$\mathbb{E} \left( X_{j+1:j+k+1}^l \right) = \frac{\mathcal{M}_{l,j,k}}{B(j+1, k+1)},$$



onde  $B(\cdot, \cdot)$  denota a função beta.

Outra importante propriedade dos MPP é (GREENWOOD et al., 1979), que se  $X$  é uma v.a., então o  $l$ -ésimo momento ordinário das estatísticas de ordem é dado por

$$\mathbb{E}(X_{1:n}^l) = \begin{cases} (k+1)\mathcal{M}_{l,0,k} & \text{se } j = 0; \\ (j+1)\mathcal{M}_{l,j,0} & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Em muitos trabalhos, os MPP foram particularizados de duas formas:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \mathcal{M}_{1,0,k} = \mathbb{E}\{X(1-F)^k\}, \quad k > 0, \\ \beta_j &= \mathcal{M}_{1,j,0} = \mathbb{E}\{XF^j\}, \quad j > 0. \end{aligned}$$

Nessa representação, dada uma estatística de ordem  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ , um estimador não-viesado para  $\alpha_k$  e  $\beta_j$  podem ser obtidos como:

$$\widehat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left[ \binom{n-r}{k} x_r \right] / \binom{n-1}{k} \quad \text{e} \quad \widehat{\beta}_j = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left[ \binom{n-r}{j} x_r \right] / \binom{n-1}{j},$$

onde  $k$  e  $j \in \mathbb{Z}_+$ .

Uma teoria geral para os MPP cobre a descrição de distribuições de probabilidade teóricas, a sumarização e a descrição de amostras observadas, estimativa não paramétrica da distribuição desconhecida de uma amostra observada, estimação de parâmetros e quantis de distribuições de probabilidade e teste de hipótese para distribuições de probabilidade (CORDEIRO; CASTRO, 2011). O método dos MPP geralmente pode ser usado para estimar parâmetros de uma distribuição cuja forma inversa não pode ser expressa explicitamente.

A Tabela 2 apresenta a função distribuição acumulada, a quantílica, e o suporte  $\mathcal{X}$  das distribuições-base consideradas neste texto para cômputo dos MPP.

Tabela 2 – Fda e Quantílica das nossas distribuições-base exponenciadas

Modelos	$F(x)$	$Q[F(x)]$	$\mathcal{X}$
Exp-Weibull	$\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\right\}\right]^a$	$\lambda \left[-\log\{1 - F(x)^{\frac{1}{a}}\}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$	$\mathbb{R}_+$
Exp-Fréchet	$\exp\left\{-a\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right\}$	$a^{\frac{1}{\alpha}} \lambda \left[-\log(F(x))\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\mathbb{R}_+$
Exp-LL	$\left[1 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha\right]^{-a}$	$\lambda \left[\frac{F(x)^{\frac{1}{a}}}{1 - F(x)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$	$\mathbb{R}_+$
Exp-Uniforme-padrão	$x^a$	$F(x)^{\frac{1}{a}}$	$[0, 1]$

## 2.4 Os Log-cumulantes

A seguir, discutimos que os log-momentos (LM's) surgem da TM assim como os momentos ordinários surgem da fc (NICOLAS; ANFINSEN, 2002; STUART et al., 1994; LEHMANN; CASELLA, 1998). Consequentemente, o  $\nu$ -ésimo LM's, dito  $\widetilde{m}_\nu$ , é definido por Nicolas e Anfinen (2002) como

$$\widetilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_X(s)}{d s^\nu} \right|_{s=1} = \int_{\mathbb{R}_+} (\log x)^\nu d F(x) = \mathbb{E} [(\log X)^\nu], \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Os cumulantes do tipo II ou log-cumulantes (LC's) de ordem  $\nu$  são obtidos da  $\nu$ -ésima derivada de  $\psi_X(s)$  no ponto  $s = 1$ :

$$\widetilde{\kappa}_\nu = \left. \frac{d^\nu \psi_X(s)}{d s^\nu} \right|_{s=1}, \quad \nu \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Analiticamente, a relação entre os log-momentos e os log-cumulantes é similar as dos momentos amostrais e seus respectivos momentos populacionais (STUART et al., 1994; LEHMANN; CASELLA, 1998). Assim, os três primeiros LC's podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa}_1 &= \widetilde{m}_1, \\ \widetilde{\kappa}_2 &= \widetilde{m}_2 - \widetilde{m}_1^2, \\ \widetilde{\kappa}_3 &= \widetilde{m}_3 - 3\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + 2\widetilde{m}_1^3. \end{aligned}$$

As fórmulas dos LM's e dos LC's também são usadas para os momentos e os cumulantes do tipo II, por exemplo (TISON et al., 2004; MOSER; ZERUBIA; SERPICO, 2006): Seja  $X$  uma v.a, então

$$\widetilde{\kappa}_1 = \widetilde{m}_1 = \mathbb{E}(\log X) \quad \text{e} \quad \widetilde{\kappa}_2 = \widetilde{m}_2 - \widetilde{m}_1^2 = \text{Var}(\log X).$$

Em geral, o LC de ordem  $\nu$  pode ser reescrito como (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011; ANFINSEN; ELTOFT, 2011)

$$\widetilde{\kappa}_\nu = \widetilde{m}_\nu - \sum_{r=1}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{r-1} \widetilde{\kappa}_r \widetilde{m}_{\nu-r}.$$

Na prática, sendo  $\widetilde{m}_\nu$  uma função do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ , então a estimação de  $\boldsymbol{\theta}$  é feita pela substituição de  $\widetilde{m}_\nu$  pelos LM's amostrais, denotados por  $\widehat{\widetilde{m}}_\nu$ , que é definido como (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011; ANFINSEN; ELTOFT, 2011; DENG; LÓPEZ-MARTÍNEZ, 2016; NICOLAS; ANFINSEN, 2002)

$$\widehat{\widetilde{m}}_\nu = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (\log x_r)^\nu,$$

em que  $n$  é o tamanho amostral e  $x_r$  é a  $r$ -ésima observação na amostra.

## 2.5 Estatística $T^2$ de Hotelling

A estatística  $T^2$  de Hotelling é uma generalização da estatística  $t$  de Student (ANDERSON, 2003, p. 170) dada por:

$$T^2 = n (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.9)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mathbf{x}_r$  é o vetor de médias amostrais baseada na amostra aleatória  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  provenientes de um vetor aleatório Normal  $\nu$ -dimensional,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ;  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  são o vetor de médias e a matriz de covariância, respectivamente; e  $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mathbf{x}_r \mathbf{x}_r^\top - n \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^\top$  é a matriz de covariância amostral. Tais estatísticas seguem distribuição  $F$  de Snedecor com  $\nu$  e  $n - \nu$  graus de liberdade, denotado por  $F_{\nu, n-\nu}$  (ANDERSON, 2003, p. 177).

Considerando o nível de significância  $\eta$ , o teste da razão de verossimilhança para a hipótese  $E(\bar{\mathbf{X}}) = \boldsymbol{\mu}$  pode ser rejeitado se  $T^2 \geq Q_F(1 - \eta; \nu, n - \nu)$ , onde  $Q_F(\cdot; \nu, n - \nu)$  é a função quantílica da  $F_{\nu, n-\nu}$  (ANDERSON, 2003). Adicionalmente, podemos construir elipsoides de confiança  $\nu$ -dimensional dados por (ANDERSON, 2003):

$$n (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq Q_F(1 - \eta; \nu, n - \nu).$$

Para amostras grandes, a distribuição  $T^2$  pode ser aproximada pela distribuição  $\chi^2$ , com  $\nu$  graus de liberdade (ANFENSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011). Este resultado é relevante para casos onde  $\mathbf{x}_r$  não segue distribuição Normal e a distribuição exata de (2.9) é desconhecida.

### 3 Transformada de Mellin como um caso especial dos MPP: estatísticas do tipo II para modelos Kumaraswamy-G

A seguir discutiremos o teorema relacionando a TM aos MPP para a família Kw-G.

**Teorema 3.0.1.** *Seja  $X$  uma variável aleatória seguindo uma família Kumaraswamy-G com fda e fdp dadas por (2.1) e (2.2), respectivamente. Então, a TM de  $X$ , denotada como  $\phi_{Kw-G}(s)$ , é dada por*

$$\phi_{Kw-G}(s) = b \mathcal{M}_{s-1,0,b-1}, \quad (3.1)$$

em que  $\mathcal{M}_{s-1,0,b-1}$  é o MPP da distribuição-base na forma  $Z(x) = G(x)^a$ .

*Demonstração.* Aplicando (2.2) em (2.3) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_{Kw-G}(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} dF(x) \\ &= \int_0^\infty x^{s-1} a b g(x) G(x)^{a-1} [1 - G(x)^a]^{b-1} dx \\ &= ab \int_0^\infty x^{s-1} g(x) \frac{G(x)^a}{G(x)} [1 - G(x)^a]^{b-1} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $G(x)^a = Z(x)$  como em Gupta e Kundu (1999), temos:

$$= ab \int_0^\infty x^{s-1} \frac{g(x)}{G(x)} Z(x) [1 - Z(x)]^{b-1} dx.$$

Como  $G'(x) = g(x)$ , então se

$$G(x) = [Z(x)]^{\frac{1}{a}} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{a} [Z(x)]^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} z(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi_{Kw-G}(s) &= ab \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\frac{1}{a} [Z(x)]^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} z(x)}{[Z(x)]^{1/a}} Z(x) [1 - Z(x)]^{b-1} dx \\ &= b \int_0^\infty x^{s-1} z(x) [1 - Z(x)]^{b-1} dx \\ &= b \int_0^\infty x^{s-1} [1 - Z(x)]^{b-1} dZ(x) \end{aligned}$$

$$\phi_{Kw-G}(s) = b \mathcal{M}_{s-1,0,b-1}.$$



Ainda, de acordo com [Greenwood et al. \(1979\)](#), para  $b > 0$  inteiro, temos que:

$$\phi_{\text{Kw-G}}(s) = b \sum_{r=0}^{b-1} (-1)^r \binom{b-1}{r} \mathcal{M}_{s-1, r, 0}.$$

Tabela 3 mostra a TM para as nossas distribuições consideradas

Tabela 3 – Transformada de Mellin para as distribuições-base consideradas.

Modelos	TM	Restrições
Kw-W	$a \lambda^{s-1} \Gamma \left( 1 + \frac{s-1}{\alpha} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a-1}{i} (-1)^i (i+1)^{\frac{(1-s)}{\alpha}-1}$	$b = 1, a > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$
Kw-F	$a^{\frac{(s-1)}{\alpha}} \lambda^{s-1} \Gamma \left( 1 - \frac{s-1}{\alpha} \right)$	$b = 1, a > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$
Kw-LL	$a \lambda^{s-1} B \left( a + \frac{s-1}{\alpha}, 1 - \frac{s-1}{\alpha} \right)$	$b = 1, a > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$
Kw	$b B \left( \frac{s-1}{a} + 1, b \right)$	$a > 0, b > 0$

### 3.1 MPP de algumas distribuições-base

[Greenwood et al. \(1979\)](#) deriva expressões dos MPP para as seguintes distribuições: Weibull, Gumbel, Lambda Generalizada, Logística, Wakeby e Kappa. [Wang \(1990a\)](#), [Wang \(1990b\)](#), [Wang \(1996\)](#), [Rasmussen \(2001\)](#), [Ashkar e Mahdi \(2003\)](#), [Mahdi e Ashkar \(2004\)](#) e [Ashkar e Mahdi \(2006\)](#) encontram expressões do MPP para outras distribuições como a GEV, a Pareto generalizada e log-logística. Mas nota-se em muitos casos, que não foram encontradas expressões do MPP na forma mais geral com os três índices  $(l, j, k)$  e sim casos particulares desses, como por exemplo os mencionados anteriormente  $\alpha_k$  e  $\beta_j$ . Também abordam o método de estimação via MPP como alternativa a outros métodos mais tradicionais como Máxima Verossimilhança e Método dos Momentos, com aplicações bastante significativas a contextos da hidrologia.

Sendo assim, para completar ainda mais a literatura, a seguir fornecemos expressões para os MPP na forma mais geral, de distribuições exponenciadas (Exp-G) na forma  $G(x)^a$ , com  $a > 0$ , onde essas  $G$  serão as funções de distribuição da Weibull, Fréchet, Log-logística e Uniforme-padrão.

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $X$  uma variável aleatória seguindo a distribuição Exp-Weibull com  $\lambda > 0$  e  $\alpha, a > 0$  como parâmetros de escala e forma, respectivamente. Os MPP de  $X$*

são dados por

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \Gamma\left(1 + \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a(j+r-\frac{1}{a}+1)}{i} (-1)^i \frac{1}{(i+1)^{1+\frac{l}{\alpha}}}.$$

*Demonstração.* Aplicando a função quantílica da Exp-Weibull

$$Q[F(x)] = \lambda \left[ -\log\{1 - F(x)^{\frac{1}{a}}\} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

em (2.5), e considerando a substituição  $u = -\log\{1 - F(x)^{\frac{1}{a}}\}$ , temos que  $F(x) = (1 - e^{-u})^a$  e  $dF(x) = a e^{-u} (1 - e^{-u})^{a-1} du$ . Substituindo os termos acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l,j,k} &= \int_0^{\infty} \lambda^l u^{\frac{l}{\alpha}} (1 - e^{-u})^{aj} \{1 - (1 - e^{-u})^a\}^k a e^{-u} (1 - e^{-u})^{a-1} du \\ &= a\lambda^l \int_0^{\infty} u^{\frac{l}{\alpha}} e^{-u} (1 - e^{-u})^{a(j+1-\frac{1}{a})} \{1 - (1 - e^{-u})^a\}^k du. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tomando a seguinte expansão em série como em Cordeiro e Castro (2011),

$$(1 - z)^j = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{j}{r} (-1)^r z^r, \quad (3.3)$$

para  $|z| < 1$  e  $j > 0$ , (3.2) torna-se:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^{\infty} u^{\frac{l}{\alpha}} e^{-u} (1 - e^{-u})^{a(j+r-\frac{1}{a}+1)} du.$$

Novamente, tomando a expansão em série mencionada acima, agora com índice  $i$ , temos:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a(j+r-\frac{1}{a}+1)}{i} (-1)^i \int_0^{\infty} u^{\frac{l}{\alpha}} e^{-u(i+1)} du.$$

De  $\Gamma(\delta) = \int_0^{\infty} x^{\delta-1} e^{-vx} dx$ , o seguinte resultado segue:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \Gamma\left(1 + \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a(j+r-\frac{1}{a}+1)}{i} (-1)^i \frac{1}{(i+1)^{1+\frac{l}{\alpha}}}.$$

Para valores inteiros não-negativos de  $k$  e  $a(j+r-\frac{1}{a}+1)$ , temos:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \Gamma\left(1 + \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r \sum_{i=0}^{a(j+r-\frac{1}{a}+1)} \binom{a(j+r-\frac{1}{a}+1)}{i} (-1)^i \frac{1}{(i+1)^{1+\frac{l}{\alpha}}}.$$

□

**Proposição 3.1.2.** *Seja  $X$  uma variável aleatória seguindo distribuição Exp-Fréchet com  $\lambda > 0$  e  $\alpha, a > 0$  como parâmetros de escala e forma, respectivamente. O MPP de  $X$  é dado por*

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a^{\frac{l}{\alpha}} \lambda^l \Gamma\left(1 - \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{1}{(j+r+1)^{1-\frac{l}{\alpha}}}.$$

*Demonstração.* Aplicando a função quantílica da Exp-Fréchet

$$Q[F(x)] = a^{\frac{1}{\alpha}} \lambda [-\log(F(x))]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

em (2.5), considerando a substituição  $u = -\log(F(x))$ , e usando o seguinte fato (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1986, p. 271)

$$\int_a^b f(x) d(x) = - \int_b^a f(x) d(x),$$

obtemos:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a^{\frac{l}{\alpha}} \lambda^l \int_0^\infty u^{-\frac{l}{\alpha}} e^{-u(j+1)} (1 - e^{-u})^k du. \quad (3.4)$$

Tomando novamente a expansão em série como em (3.3), (3.4) torna-se:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a^{\frac{l}{\alpha}} \lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^\infty u^{-\frac{l}{\alpha}} e^{-u(j+r+1)} du.$$

Utilizando a função gamma  $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty x^{\delta-1} e^{-vx} dx$ , o resultado é dado por:

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = \lambda^l \Gamma\left(1 - \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{1}{(j+r+1)^{1-\frac{l}{\alpha}}}.$$

Para valores inteiros não-negativos de  $k$ , temos (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1986, p. 612):

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = \lambda^l \Gamma\left(1 - \frac{l}{\alpha}\right) \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r \frac{1}{(j+r+1)^{1-\frac{l}{\alpha}}}.$$

□

**Proposição 3.1.3.** *Seja  $X$  uma variável aleatória seguindo distribuição Exp-log-logística com  $\lambda > 0$  e  $\alpha, a > 0$  como parâmetros de escala e forma, respectivamente. Os MPP de  $X$  são dados por*

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\alpha^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r B\left(a + ar + a + \frac{l}{\alpha}; 1 - \frac{l}{\alpha}\right).$$

*Demonstração.* Aplicando a função quantílica da Exp-log-logística

$$Q[F(x)] = \lambda \left[ \frac{F(x)^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - F(x)^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

em (2.5), e considerando a mudança de variável  $F(x)^{\frac{1}{\alpha}} = z$ , temos  $F(x) = z^{\alpha}$ , e conforme sugerido em Ashkar e Mahdi (2003) obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l,j,k} &= \int_0^1 \lambda^l \left( \frac{F(x)^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - F(x)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{l}{\alpha}} F(x)^j (1 - F(x))^k dF(x), \\ &= a\lambda^l \int_0^1 \left( \frac{z}{1 - z} \right)^{\frac{l}{\alpha}} z^{aj} (1 - z^{\alpha})^k z^{a-1} dz, \\ &= a\lambda^l \int_0^1 \frac{z^{(aj+a+\frac{l}{\alpha}-1)}}{(1 - z)^{\frac{l}{\alpha}}} (1 - z^{\alpha})^k dz. \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo coeficiente binomial definido anteriormente, (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} &= a\lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^1 \frac{z^{(aj+ar+a+\frac{l}{\alpha}-1)}}{(1 - z)^{\frac{l}{\alpha}}} dz \\ \mathcal{M}_{l,j,k} &= a\lambda^l \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} (-1)^r B\left(aj + ar + a + \frac{l}{\alpha}; 1 - \frac{l}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Para valores inteiros não-negativos de  $k$ , temos (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1986, p. 612):

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = a\lambda^l \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r B\left(aj + ar + a + \frac{l}{\alpha}; 1 - \frac{l}{\alpha}\right).$$

Em que  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt$  é a função Beta.

□

**Proposição 3.1.4.** *Seja  $X$  uma variável aleatória seguindo distribuição Exp-Uniforme-padrão com  $a > 0$  como parâmetros de forma. Os MPP de  $X$  são dados por*

$$\mathcal{M}_{l,j,k} = B\left(j + \frac{l}{a} + 1; k + 1\right).$$

*Demonstração.* Utilizando a definição dos MPP, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l,j,k} &= \int_0^1 x^l F(x)^{aj} (1 - F(x)^a)^k dF(x)^a, \\ &= \int_0^1 x^{a(j+\frac{l}{a})} (1 - x^a)^k dx^a, \\ &= B\left(j + \frac{l}{a} + 1; k + 1\right) \end{aligned}$$

em que  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt$  é a função Beta.

□



## 3.2 Diagramas de Log-cumulantes

Conforme discutido em [Delignon, Garello e Hillion \(1997\)](#) e [Tison et al. \(2004\)](#), os diagramas de Pearson são uma ferramenta utilizada para seleção de modelos e avaliação de bondade de ajuste. Tais diagramas são baseados em medidas de assimetria e curtose. [Nicolas e Anfinzen \(2002\)](#) apresentaram casos em que o diagrama de Pearson pode ser analiticamente intratável e introduziram o diagrama  $(\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2)$ , que é similar ao digrama de Pearson, mas emprega estatísticas do tipo II,  $\tilde{\kappa}_3$  e  $\tilde{\kappa}_2$ , ao invés de medidas de assimetria e curtose.

[Anfinzen e Eltoft \(2011\)](#) introduzem o diagrama da Matriz de Log-Cumulantes (MLC) como uma alternativa para inspecionar visualmente o espaço multidimensional onde cada dimensão é representada por uma particular MLC de ordem  $\nu$ . Assim, essa ferramenta de visualização facilita o uso da TM e fornece intuição ao método de LC's. O diagrama em [Anfinzen e Eltoft \(2011\)](#) é uma extensão do diagrama considerado por [Nicolas e Anfinzen \(2002\)](#) para a TM univariada. Em [Li et al. \(2011\)](#), [Anfinzen, Doulgeris e Eltoft \(2011\)](#), [Khan e Guida \(2013\)](#), [Deng e López-Martínez \(2016\)](#) o diagrama de LC baseado na TM foi empregada para classificação das fdp para dados de imagens SAR.

Neste trabalho, empregamos o diagrama  $(\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2)$  como uma ferramenta para avaliar ajustes sobre modelos Kumaraswamy-G aplicados a dados hidrológicos. Os log-cumulantes de cada modelo são derivados usando-se as expressões dos MPP e a TM e são mostrados na Tabela 4, onde os LC's são escritos em termos das funções digama e poligama dadas por  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$  e  $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \log \Gamma(z)$  ([ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964](#), p. 258–260), respectivamente.

Tabela 4 – Log-cumulantes dos nossos modelos considerados

Modelos	$\tilde{\kappa}_1$	$\tilde{\kappa}_2$	$\tilde{\kappa}_3$	...	$\tilde{\kappa}_\nu \quad \forall \nu > 1$
Kw-W	$\log(\lambda) + \frac{\psi(1)+m(a)}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1)$	$\frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1)$	...	$\frac{1}{\alpha^\nu} \psi^{(\nu-1)}(1)$
Kw-F	$\log(\lambda) - \frac{\psi(1)-\log(a)}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1)$	$-\frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1)$	...	$(-1)^\nu \frac{1}{\alpha^\nu} \psi^{(\nu-1)}(1)$
Kw-LL	$\log(\lambda) + \frac{\psi(a)-\psi(1)}{\alpha}$	$\frac{\psi^{(1)}(a)+\psi^{(1)}(1)}{\alpha^2}$	$\frac{\psi^{(2)}(a)-\psi^{(2)}(1)}{\alpha^3}$	...	$\frac{\psi^{(\nu-1)}(a)+(-1)^\nu \psi^{(\nu-1)}(1)}{\alpha^\nu}$
Kw	$\frac{\psi(1)-\psi(b+1)}{a}$	$\frac{\psi^{(1)}(1)-\psi^{(1)}(b+1)}{a^2}$	$\frac{\psi^{(2)}(1)-\psi^{(2)}(b+1)}{a^3}$	...	$\frac{\psi^{(\nu-1)}(1)-\psi^{(\nu-1)}(b+1)}{a^\nu}$

$$\text{onde } m(a) = \frac{\sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i} (-1)^{(i+1)} (i+1)^{-1} \log(i+1)}{\sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i} (-1)^{(i+1)} (i+1)^{-1}}.$$

A Figura 5 mostra as regiões no diagrama  $(\tilde{\kappa}_3; \tilde{\kappa}_2)$  vinculadas aos modelos Kw-W, Kw-F,

Kw-LL e Kw. Essas regiões podem ser entendidas como variedades topológicas (ANFINSEN; ELTOFT, 2011). Cada distribuição é representada por um subespaço, cujas dimensões dependem do número de parâmetros da distribuição associada (ANFINSEN; ELTOFT, 2011; ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011). No entanto, a região resultante pode se degenerar em uma curva. Por exemplo, a distribuição GEV não possui parâmetros de forma e sua variedade é representado por uma linha tracejada vertical, que pode ser vista como uma variedade de dimensão zero.

As regiões vinculadas às distribuições Kw-W e Kw-F são parametrizadas por um único parâmetro. Essas regiões são representadas, respectivamente, por uma curva sólida e pontilhada na Figura 5, sendo variedades unidimensionais. Por outro lado, as distribuições Kw e Kw-LL resultam em variedades bidimensionais pois são parametrizadas por dois parâmetros.

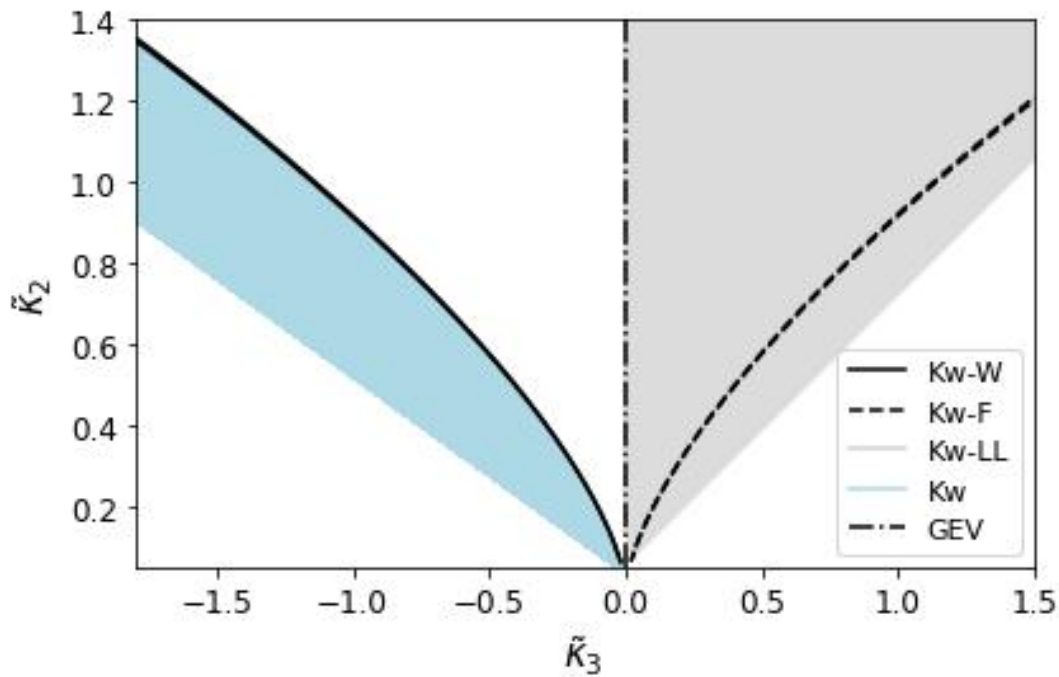


Figura 5 – Diagrama de LC,  $\tilde{\kappa}_3$  e  $\tilde{\kappa}_2$ , para Kw-W, Kw-F, Kw-LL e Kw.

## 4 Novo teste de bondade de ajuste para a família Kw-G

Nosso objetivo é aplicar a estatística  $T^2$  de Hotelling como uma alternativa de testes de bondade de ajuste, baseado em LC's. Pretendemos estimar os LC's e então, selecionar a distribuição que melhor se ajusta aos dados de acordo com a localização dos LC's estimados  $\begin{bmatrix} \hat{\kappa}_2 & \hat{\kappa}_3 \end{bmatrix}^\top$  sobre o diagrama  $(\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2)$ .

Portanto, precisamos de uma estatística de teste para a hipótese nula  $\mathcal{H}_0 : E \left( \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_2 & \hat{\kappa}_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix}$ . Este teste deve rejeitar ou não as estimativas dos LC's para regiões particulares sobre o diagrama  $(\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2)$ .

Por serem analiticamente tratáveis, os LC's podem ter expressões de forma fechada, como mostrado em Tabela 4, para algumas distribuições Kw-G. Essa ligação entre os parâmetros e os LC's pode ser usado para derivarmos estimadores para os LC's. Em outras palavras, temos que

$$\hat{\kappa}_2 = g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad \text{e} \quad \hat{\kappa}_3 = g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é o vetor de parâmetros estimados; e  $g_2(\cdot)$  e  $g_3(\cdot)$  são funções compostas que retornam os valores dos LC's em termos dos parâmetros das distribuições-base por meio das equações: (2.3), (2.4), (2.8) e (3.1).

Ademais, notamos que para grandes amostras, considerando o método Delta generalizado (LEHMANN; CASELLA, 1998), o estimador  $\begin{bmatrix} \hat{\kappa}_2 & \hat{\kappa}_3 \end{bmatrix}^\top$  segue distribuição Normal bivariada com média  $\begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix}^\top$  e matriz de covariância assintótica  $\mathbf{K}$ , como previamente mostrado em Anfinsen, Doulgeris e Eltoft (2011), Khan e Guida (2013), Deng e López-Martínez (2016). A matriz de covariância assintótica estimada  $\hat{\mathbf{K}}$  pode ser obtida da matriz de covariância assintótica dos parâmetros estimados  $\boldsymbol{\Sigma}$  (ANFINSSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011). Como mostrado em Anfinsen, Doulgeris e Eltoft (2011, p. 2769), podemos escrever

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{J}}^\top \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{J}},$$

onde

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_1} & \frac{\partial g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_1} \\ \frac{\partial g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_2} & \frac{\partial g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_r} & \frac{\partial g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_r} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$\theta_r$  é o  $r$ -ésimo parâmetro do modelo e  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  é a matriz de covariância assintótica do estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Os estimadores de máxima verossimilhança das distribuições Kw-G dificilmente têm expressões de forma fechada e sua matriz de covariância é desconhecida como mostrado na Kw-Weibull (CORDEIRO; ORTEGA; NADARAJAH, 2010) e Kw-log-logística (SANTANA et al., 2012), por exemplo.

Como apresentado em Bickel e Doksum (2001, p. 181–182) e Anfinson, Doulgeris e Eltoft (2011), a inversa da Matriz de Informação de Fisher (MIF) pode ser empregada como uma aproximação para a matriz de covariância, por ser a matriz de covariância assintótica dos estimadores de MV (BICKEL; DOKSUM, 2001, p. 181–182). Assim, temos a seguinte aproximação para  $\boldsymbol{\Sigma}$  (CASELLA; BERGER, 2002, Teo. 7.3.11):

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx - \left[ \mathbf{E} \left( \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top \partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

sob certas condições de regularidade (BICKEL; DOKSUM, 2001).

Para a maioria dos modelos Kw-G, o cálculo da MIF é analiticamente intratável. A solução usual para este problema é utilizar a Matriz de Informação Observada ao invés da MIF, como foi feito em Cordeiro, Ortega e Nadarajah (2010) e Santana et al. (2012). Assim, a matriz de informação observada é um estimador para a MIF.

Portanto, neste trabalho, usamos a matriz de informação observada como substituta para a matriz de covariância assintótica dos estimadores de MV. A matriz de informação observada tem a vantagem de ser positiva definida; medindo assim a curvatura observada na superfície da log-verossimilhança. Em outras palavras, fornece uma indicação de quanto uma superfície de verossimilhança multidimensional é rotacionada com respeito aos eixos dos parâmetros (LINDSEY, 1996). Para a estimação dos parâmetros dos modelos, empregamos o método de MV porque este produz estimativas invariantes, consistentes e assintoticamente eficientes (SERFLING, 2009).

Assim, comparando com (2.9) e (4.1), para LC's de segunda e terceira ordem,  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$ , temos que  $\nu = 2$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix}^\top$ ,  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_2 & \hat{\kappa}_3 \end{bmatrix}^\top$ , onde  $\hat{\kappa}_2$  e  $\hat{\kappa}_3$  são os estimadores

amostrais para  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$ , respectivamente. A matriz  $\mathbf{S}$  pode ser substituída pela matriz de covariância assintótica  $\widehat{\mathbf{K}}$  de  $[\widehat{\tilde{\kappa}}_2, \widehat{\tilde{\kappa}}_3]^\top$ . Com isso, obtemos a seguinte estatística:

$$T^2 = n \left( \begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\kappa}}_2 \\ \widehat{\tilde{\kappa}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \right)^\top \widehat{\mathbf{K}}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\kappa}}_2 \\ \widehat{\tilde{\kappa}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \right), \quad (4.3)$$

onde a inversa de  $\widehat{\mathbf{K}}$  é obtida via inversão usual de matriz (HARVILLE, 1997; RENCHER; SCHAALJE, 2008) se a matriz  $\widehat{\mathbf{K}}$  é não-singular (RAO et al., 2008, p. 508); caso contrário, a inversa generalizada de Moore-Penrose (SEBER, 2007; RAO et al., 2008) é empregada.

Para isto, calculamos as estimativas dos LC's  $\widehat{\tilde{\kappa}}_2$  e  $\widehat{\tilde{\kappa}}_3$  do diagrama  $(\tilde{\kappa}_3, \tilde{\kappa}_2)$  (NICOLAS; ANFINSEN, 2002) e empregamos na fórmula da estatística  $T^2$  de Hotelling. Considerando grandes amostras, a distribuição assintótica da variável aleatória  $T^2$  é a distribuição  $\chi^2$  (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011). Assim, em (4.3), podemos adotar a aproximação  $Q_F(\cdot; \nu, n - \nu) \approx Q_{\chi^2}(\cdot; \nu)$ , onde  $Q_{\chi^2}(\cdot; \nu)$  é a função quantílica da distribuição  $\chi^2$  com  $\nu$  graus de liberdade. Portanto, podemos derivar elipses de confiança com nível de significância  $\eta$  de acordo com:

$$\left( \begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\kappa}}_2 \\ \widehat{\tilde{\kappa}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \right)^\top \widehat{\mathbf{K}}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\kappa}}_2 \\ \widehat{\tilde{\kappa}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \right) \leq \frac{1}{n} Q_{\chi^2}(\eta; 2),$$

onde  $Q_{\chi^2}(\eta; 2)$  é a função quantílica da  $\chi^2_2$ . A elipse descrita acima é centrada em  $(\tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}_3)$  e seus eixos são direcionados de acordo com os autovetores de  $\widehat{\mathbf{K}}$  (HÄRDLE; SIMAR, 2007).

## 4.1 Estatísticas $T^2$ para os modelos selecionados

Baseado no que foi exposto até aqui, quatro novas medidas de bondade de ajuste são propostas para as distribuições Kw-W, Kw-F, Kw-LL e Kw, respectivamente.

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $X$  variável aleatória seguindo distribuição Kw-W com parâmetros  $a > 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , então a estatística  $T^2$  de Hotelling baseada nos LC's, aqui denotada como  $T^2_{KwW}$ , é dada por*

$$T^2_{KwW} = \frac{n\hat{\alpha}^6}{4} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 \left( \frac{|\widehat{\mathbf{H}}_{KwW}|}{U_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} U_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} - U_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}}^2} \right),$$

onde  $|\cdot|$  é o determinante da matriz  $\widehat{\mathbf{H}}$ .  $|\widehat{\mathbf{H}}_{KwW}|$  é o estimador de  $|\mathbf{H}_{KwW}|$  dado por

$$|\mathbf{H}_{KwW}| = U_{\alpha\alpha}(U_{\lambda\lambda}U_{aa} - U_{\lambda a}^2) + U_{\alpha\lambda}(U_{\alpha a}U_{\lambda a} - U_{\alpha\lambda}U_{aa}) + U_{\alpha a}(U_{\alpha\lambda}U_{\lambda a} - U_{\alpha a}U_{\lambda\lambda});$$

e  $\hat{a}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$  são os estimadores para  $a$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ , respectivamente. As quantidades  $U$  são as entradas da matriz de informação associada e são dadas no Apêndice A.

**Proposição 4.1.2.** *Seja  $X$  variável aleatória seguindo distribuição Kw-F com parâmetros  $a > 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , então a estatística  $T^2$  de Hotelling baseada nos LC's, aqui denotada como  $T_{KwF}^2$ , é dada por*

$$T_{KwF}^2 = \frac{n\hat{\alpha}^6}{4} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 \left( \frac{|\widehat{\mathbf{H}}_{KwF}|}{U_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}U_{\hat{a}\hat{a}} - U_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}}^2} \right),$$

onde  $|\cdot|$  é o determinante da matriz  $\widehat{\mathbf{H}}$ .  $|\widehat{\mathbf{H}}_{KwF}|$  é o estimador de  $|\mathbf{H}_{KwF}|$  dado por

$$|\mathbf{H}_{KwF}| = U_{\alpha\alpha}(U_{\lambda\lambda}U_{aa} - U_{\lambda a}^2) + U_{\alpha\lambda}(U_{\alpha a}U_{\lambda a} - U_{\alpha\lambda}U_{aa}) + U_{\alpha a}(U_{\alpha\lambda}U_{\lambda a} - U_{\alpha a}U_{\lambda\lambda});$$

e  $\hat{a}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$  são os estimadores para  $a$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ , respectivamente. As quantidades  $U$  são as entradas da matriz de informação associada e são dadas no Apêndice A.

**Proposição 4.1.3.** *Seja  $X$  variável aleatória seguindo distribuição Kw-LL com parâmetros  $a > 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , então a estatística  $T^2$  de Hotelling baseada nos LC's, aqui denotada como  $T_{KwLL}^2$ , é dada por*

$$T_{KwLL}^2 = \frac{n}{\hat{\delta}_{22}\hat{\delta}_{33} - (\hat{\delta}_{23})^2} \left[ \hat{\delta}_{33} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2)^2 + \hat{\delta}_{22} (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2) (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3) \right],$$

onde  $\hat{\kappa}_2$  e  $\hat{\kappa}_3$  são as estimativas dos LC's  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$ , respectivamente;  $\hat{\delta}_{22}$ ,  $\hat{\delta}_{23}$ , e  $\hat{\delta}_{33}$  são as estimativas para  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{23}$ , e  $\delta_{33}$  dados de forma compacta por

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= [J_{12} \ 0 \ J_{32}] \cdot \Sigma_{KwLL} \cdot [J_{12} \ 0 \ J_{32}]^\top, \\ \delta_{23} &= [J_{12} \ 0 \ J_{32}] \cdot \Sigma_{KwLL} \cdot [J_{13} \ 0 \ J_{33}]^\top, \\ \delta_{33} &= [J_{13} \ 0 \ J_{33}] \cdot \Sigma_{KwLL} \cdot [J_{13} \ 0 \ J_{33}]^\top; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\frac{2}{\alpha^3} \{ \psi^{(1)}(a) + \psi^{(1)}(1) \}, \\ J_{32} &= \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(2)}(a), \quad J_{33} = \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(3)}(a), \\ J_{13} &= -\frac{3}{\alpha^4} \{ \psi^{(2)}(a) - \psi^{(2)}(1) \}. \end{aligned}$$

A matriz  $\Sigma_{KwLL}$  é mostrada no Apêndice A com as expressões acima totalmente expandidas.

**Proposição 4.1.4.** *Seja  $X$  variável aleatória seguindo distribuição Kw com parâmetros  $a > 0$  e  $b > 0$ , então sua estatística  $T^2$  de Hotelling, aqui denotada como  $T_{Kw}^2$ , é dada por*

$$T_{Kw}^2 = \frac{n|\widehat{\mathbf{H}}_{Kw}|}{\hat{\delta}_{22}\hat{\delta}_{33} - \hat{\delta}_{23}^2} \cdot \left[ \hat{\delta}_{33} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2)^2 + \hat{\delta}_{22} (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2) (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3) \right],$$

onde  $|\widehat{\mathbf{H}}_{Kw}|$  é o estimador de  $|\mathbf{H}_{Kw}|$  dado por

$$|\mathbf{H}_{Kw}| = U_{aa}U_{bb} - (U_{ab})^2;$$

e  $\widehat{\kappa}_2$  e  $\widehat{\kappa}_3$  são as estimativas dos LC's  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$ , respectivamente; e  $\widehat{\delta}_{22}$ ,  $\widehat{\delta}_{23}$ , e  $\widehat{\delta}_{33}$  são as estimativas para  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{23}$ , e  $\delta_{33}$  dadas de forma compacta por

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \begin{bmatrix} J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \cdot \Sigma_{Kw} \cdot \begin{bmatrix} J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}^\top, \\ \delta_{23} &= \begin{bmatrix} J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \cdot \Sigma_{Kw} \cdot \begin{bmatrix} J_{13} & J_{23} \end{bmatrix}^\top, \\ \delta_{33} &= \begin{bmatrix} J_{13} & J_{23} \end{bmatrix} \cdot \Sigma_{Kw} \cdot \begin{bmatrix} J_{13} & J_{23} \end{bmatrix}^\top;\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}J_{12} &= \frac{2}{a^3} \{ \psi^{(1)}(b+1) - \psi^{(1)}(1) \}, \\ J_{22} &= -\frac{\psi^{(2)}(b+1)}{a^2}, \\ J_{13} &= \frac{3}{a^4} \{ \psi^{(2)}(b+1) - \psi^{(2)}(1) \}, \\ J_{23} &= -\frac{\psi^{(3)}(b+1)}{a^3}.\end{aligned}$$

A matriz  $\Sigma_{Kw}$  é mostrada no Apêndice A com as expressões acima totalmente expandidas.

# 5 Aplicação

## 5.1 Conjuntos de dados e suas estatísticas descritivas

Separamos quatro conjuntos de dados para serem submetidos a nossa metodologia, determinando, de acordo com o novo critério de bondade de ajuste introduzido, qual o modelo mais adequado para cada conjunto dentre os candidatos Kw-W, Kw-F, Kw-LL e Kw. A seguir descrevemos brevemente nossos dados:

- (i) Picos (PI)([CHOULAKIAN; STEPHENS, 2001](#)): 72 excessos de picos de inundação (em  $m^3/s$ ) do rio Wheaton no território de Yukon, Canadá.
- (ii) Fluxo (FL)([EVIN; MERLEAU; PERREAULT, 2011](#)): dados anuais de fluxo do rio Senegal, 1903–1986.
- (iii) Chuva (CH)([BRYSON, 1974](#)): 26 observações de precipitação em estudo meteorológico na Flórida-EUA.
- (iv) Irrigação (IR)([SECKLER; SAMPATH; RAHEJA, 1988](#)): proporção de área irrigada de 39 fazendas em um curso de água sob o sistema Warabandi de gerenciamento de irrigação na Índia.

A Tabela 5 apresenta a análise descritiva sumarizada para os bancos de dados utilizados em nossa aplicação.

Tabela 5 – Análise descritiva e LC's ( $\hat{\kappa}_2$  e  $\hat{\kappa}_3$ ) para nossos conjuntos de dados

Dados	Média	Mediana	Desvio-padrão	Assimetria	Curtose	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}_3$
PI	12.20	9.50	12.30	1.44	2.73	1.98	-1.78
FL	702.11	680.5	270.21	0.18	-0.87	0.18	-0.05
CH	442.02	221.6	650.78	2.16	4.11	2.46	-1.88
IR	0.39	0.35	0.18	1.08	1.14	0.20	0.01



## 5.2 Estimativas e p-valores

A estatística  $T^2$  de Hotelling com seus respectivos p-valores foi calculada e é exibida na Tabela 6. Tais estatísticas obtidas podem ser interpretadas como uma medida da distância entre os dados e cada modelo Kumaraswamy-G. Valores mais baixos da estatística  $T^2$  de Hotelling indicam um melhor ajuste dos dados.

Ao separar os modelos ligados aos menores valores da estatística  $T^2$  de Hotelling, temos que a distribuição Kw-Weibull é um bom modelo para os conjuntos de dados Picos (PI). Os dados de Fluxo (FL) poderia ser melhor modelada pela distribuição Kw-Frechét e Kw-log-logística, esta última, também se adéqua para modelar os dados de Chuva (CH). Por fim, a Kumaraswamy é indicada para modelar os dados de proporção de área irrigada (IR), o que está de acordo com os valores assumidos por tais dados.

Tabela 6 – Estatística  $T^2$  de Hotelling e  $p$ -valor (em parênteses)

Modelos	PI	FL	CH	IR
Kw-W	5.6317 (0.1508)	> 10 ( $\approx 0.00$ )	> 10 ( $\approx 0.00$ )	> 10 ( $\approx 0.00$ )
Kw-F	> 10 ( $\approx 0.00$ )	0.793 (0.8554)	> 10 ( $\approx 0.00$ )	> 10 ( $\approx 0.00$ )
Kw-LL	> 10 ( $\approx 0.00$ )	0.236 (0.9729)	0.7221 (0.8718)	> 10 ( $\approx 0.00$ )
Kw	-	-	-	0.0825 (0.9942)

## 6 Considerações finais e trabalhos futuros

Neste trabalho, fornecemos novas medidas de bondade de ajuste através da estatística  $T^2$  de Hotelling para modelos advindos da família de distribuições Kumaraswamy-G (Kw-G). Para isto, provamos um teorema que encontra a expressão da Transformada de Mellin para qualquer modelo da Kw-G, como função dos Momentos Ponderados de Probabilidade das distribuições-base. Encontramos expressões de forma fechada completas dos MPP's para as nossas quatro distribuições-base (a mencionar, Weibull, Frechét, Log-logística e Uniforme) em uma forma ainda mais geral, quando encontram-se elevada a um parâmetro positivo (Exp-G). Ainda, derivamos analiticamente expressões para os log-cumulantes (LC) dos nossos modelos estudados para encontrarmos as expressões das nossas estatísticas  $T^2$ . Aplicamos tais medidas de bondade a quatro banco de dados reais provenientes de estudos hidrológicos afim de demonstrarmos a aplicabilidade do método.

Como trabalho futuro, esperamos realizar ensaios de amostragem bootstrap e plotarmos esses dados reamostrados em nosso diagrama  $(\tilde{\kappa}_3; \tilde{\kappa}_2)$  exibido na Figura 5 para introduzirmos além da análise numérica da estatística  $T^2$ , uma abordagem de inspeção visual dos dados. Ainda com o mesmo método de reamostragem bootstrap, desejamos obter Intervalos de Confiança (IC) não-paramétricos para as estimativas de  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$  com diferentes tamanhos amostrais. Podemos então derivarmos elipses de confiança como mostrado a partir da equação 4.3 e verificarmos a porcentagem de cobertura dessa elipse em nossos dados reamostrados.

# Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: Dover, 1964. 19
- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. *METRON*, v. 71, p. 63–79, 2013. 1
- ANDERSON, T. W. *An introduction to multivariate statistical analysis*. [S.l.]: Wiley, 2003. 752 p. (Wiley series in probability and statistics). 13
- ANDREEV, A.; KANTO, A.; MALO, P. Computational examples of a new method for distribution selection in the Pearson system. *Journal of applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 487–506, 2007. 1
- ANFENSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Goodness-of-fit tests for multilook polarimetric radar data based on the Mellin transform. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 49, p. 2764–2781, 2011. 2, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23
- ANFENSEN, S. N.; ELTOFT, T. Application of the matrix-variate Mellin transform to analysis of polarimetric radar images. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 49, n. 6, p. 2281–2295, 2011. 2, 12, 19, 20
- ASHKAR, F.; MAHDI, S. Comparison of two fitting methods for the log-logistic distribution. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 39, n. 8, 2003. 15, 18
- ASHKAR, F.; MAHDI, S. Fitting the log-logistic distribution by generalized moments. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 328, n. 3-4, p. 694–703, 2006. 1, 8, 15
- BARRETO-SOUZA, W.; CORDEIRO, G. M.; SIMAS, A. B. Some results for beta Fréchet distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 40, n. 5, p. 798–811, 2011. 6
- BICKEL, P. J.; DOKSUM, K. A. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. 2. ed. [S.l.]: Prentice–Hall, 2001. 532 p. 22
- BILINGSLEY, P. *Probability and Measure*. 4. ed. [S.l.]: Wiley, 2016. 608 p. ISBN 0471007102. 9
- BRYSON, M. C. Heavy-tailed distributions: properties and tests. *Technometrics*, Taylor & Francis Group, v. 16, n. 1, p. 61–68, 1974. 26
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical Inference*. 2. ed. [S.l.]: Duxbury Press, 2002. 686 p. 22
- CHABERT, M.; TOURNERET, J. Y. Bivariate Pearson distributions for remote sensing images. *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, p. 4038–4041, 2011. 1
- CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate good-ness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*, v. 27, p. 154–161, 1995. 1

- CHOULAKIAN, V.; STEPHENS, M. A. Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, Taylor & Francis, v. 43, n. 4, p. 478–484, 2001. [26](#)
- CLARKE, R. T. Estimating trends in data from the Weibull and a generalized extreme value distribution. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 38, n. 6, p. 25–1, 2002. [1](#)
- COLLETT, D. *Modelling survival data in medical research*. [S.l.]: CRC press, 2015. [8](#)
- COLOMBO, S. *Les transformations de Mellin et de Hankel: applications à la physique mathématique*. [S.l.]: Centre National de la Recherche Scientifique, 1959. [9](#)
- CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, Taylor & Francis, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011. [3](#), [11](#), [16](#)
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; NADARAJAH, S. The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data. *Journal of the Franklin Institute*, v. 347, n. 8, p. 1399 – 1429, 2010. ISSN 0016-0032. [2](#), [4](#), [22](#)
- DELIGNON, Y.; GARELLO, R.; HILLION, A. Statistical modelling of ocean SAR images. *IEE Proceedings-Radar*, v. 144, p. 348–354, 1997. [1](#), [19](#)
- DENG, X.; LÓPEZ-MARTÍNEZ, C. Higher order statistics for texture analysis and physical interpretation of polarimetric sar data. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 13, n. 7, p. 912–916, 2016. [2](#), [12](#), [19](#), [21](#)
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 31, p. 497–512, 2002. [1](#)
- EVIN, G.; MERLEAU, J.; PERREAULT, L. Two-component mixtures of normal, gamma, and Gumbel distributions for hydrological applications. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 47, n. 8, 2011. [26](#)
- GREENWOOD, J. A. et al. Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 15, n. 5, p. 1049–1054, 1979. [10](#), [11](#), [15](#)
- GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by Lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and methods*, Taylor & Francis, v. 27, n. 4, p. 887–904, 1998. [1](#)
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999. [1](#), [2](#), [10](#), [14](#)
- HAKTANIR, T.; BOZDUMAN, A. A study on sensitivity of the probability-weighted moments method on the choice of the plotting position formula. *Journal of Hydrology*, v. 168, p. 265–281, 1995. [10](#)
- HARVILLE, D. A. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. [S.l.]: Springer, 1997. [23](#), [36](#), [38](#), [44](#)

- HÄRDLE, W. K.; SIMAR, L. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. [S.l.]: Springer, 2007. 23
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions*. second. [S.l.]: Wiley, 1994. v. 1. 784 p. ISBN 978-0-471-58495-7. 1
- JONES, M. Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 70–81, 2009. 3
- KHAN, S.; GUIDA, R. Application of Mellin-kind statistics to polarimetric  $\mathcal{G}$  distribution for sar data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 52, n. 6, p. 3513–3528, 2013. 2, 19, 21
- KLEIBER, C.; KOTZ, S. *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. v. 470. 8
- KOTZ, S.; NADARAJAH, S. *Extreme value distributions: theory and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2000. 6
- KRISHNA, E.; JOSE, K.; RISTIĆ, M. M. Applications of Marshall–Olkin Fréchet distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 42, n. 1, p. 76–89, 2013. 6
- KRYLOV, V. A. et al. On the method of logarithmic cumulants for parametric probability density function estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 22, n. 10, p. 3791–3806, 2013. 2
- KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 46, n. 1-2, p. 79–88, 1980. 2, 3
- LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. *Theory of Point Estimation*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1998. v. 1. 12, 21
- LEMONTE, A. J. Improved point estimation for the Kumaraswamy distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 81, n. 12, p. 1971–1982, 2011. 3
- LI, H.-C. et al. On the empirical-statistical modeling of sar images with generalized gamma distribution. *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 386–397, 2011. 2, 19
- LINDSEY, J. K. *Parametric Statistical Inference*. [S.l.]: Oxford Science Publications, 1996. 22
- LINHART, H.; ZUCCHINI, W. *Model Selection*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1986. 1
- MAHDI, S.; ASHKAR, F. Exploring generalized probability weighted moments, generalized moments and maximum likelihood estimating methods in two-parameter Weibull model. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 285, n. 1-4, p. 62–75, 2004. 15
- MANSOUR, M. et al. The Kumaraswamy exponentiated Fréchet distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, v. 34, 06 2018. 2, 6

- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, v. 84, p. 641–652, 1997. [1](#)
- MCQUARRIE, A. D. R.; TSAI, C.-L. *Regression and time series model selection*. [S.l.]: World Scientific, 1998. 480 p. [1](#)
- MEAD, M. E. A. A note on Kumaraswamy Fréchet distribution. *Australia*, v. 8, p. 294–300, 2014. [6](#)
- MITNIK, P. A. New properties of the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 42, n. 5, p. 741–755, 2013. [3](#)
- MOSER, G.; ZERUBIA, J.; SERPICO, S. B. Sar amplitude probability density function estimation based on a generalized Gaussian model. *IEEE transactions on image processing*, IEEE, v. 15, n. 6, p. 1429–1442, 2006. [12](#)
- NADARAJAH, S. On the distribution of Kumaraswamy. *Journal of Hydrology*, v. 348, n. 3, p. 568–569, 2008. [1](#), [3](#)
- NAGAHARA, Y. A method of simulating multivariate nonnormal distributions by the Pearson distribution system and estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 47, p. 1–29, 2004. [1](#)
- NICOLAS, J.-M.; ANFINSEN, S. N. Introduction to second kind statistics: Application of log-moments and log-cumulants to the analysis of radar image distributions. *Trait. Signal*, Citeseer, v. 19, n. 3, p. 139–167, 2002. [2](#), [9](#), [10](#), [12](#), [19](#), [23](#)
- NICOLAS, J. M.; MARUANI, A. Lower order statistics: a new approach for probability density functions defined on  $\mathbb{R}^+$ . In: IEEE. *2000 10th European Signal Processing Conference*. [S.l.], 2000. p. 1–4. [2](#)
- PAKYARI, R.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test for progressively type-II censored data. *IEEE transactions on reliability*, v. 61, p. 238–244, 2012. [1](#)
- PEARSON, K. Memoir on skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, p. 343–414, 1895. [1](#)
- PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and Series: Special functions*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1986. v. 1. 802 p. [17](#), [18](#)
- RAMOS, P. L. et al. The Fréchet distribution: Estimation and application - an overview. *Journal of Statistics and Management Systems*, Taylor & Francis, p. 1–30, 2019. [1](#)
- RAO, C. R. et al. Linear models and generalizations. *Least Squares and Alternatives (3rd edition)* Springer, Berlin Heidelberg New York, 2008. [23](#), [36](#), [37](#), [38](#), [40](#), [41](#), [42](#), [43](#), [44](#)
- RASMUSSEN, P. F. Generalized probability weighted moments: application to the generalized Pareto distribution. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 37, n. 6, p. 1745–1751, 2001. [15](#)

- RENCHER, A. C.; SCHAALJE, G. B. *Linear Models in Statistics*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 688 p. ISBN 9780471754985. [23](#), [36](#), [38](#), [44](#)
- RISTIC, M. M.; BALAKRISHNAN, N. The gamma exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 82, p. 1191–1206, 2012. [1](#)
- SANTANA, T. et al. The Kumaraswamy-log-logistic distribution. *Journal of statistical theory and applications*, v. 11, p. 265–291, 09 2012. [2](#), [7](#), [22](#)
- SEBER, G. A. F. *A Matrix Handbook for Statisticians*. 1st. ed. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 2007. [23](#), [36](#), [38](#), [40](#), [41](#), [42](#), [43](#), [44](#)
- SECKLER, D.; SAMPATH, R.; RAHEJA, S. An index for measuring the performance of irrigation management systems with an application 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, Wiley Online Library, v. 24, n. 4, p. 855–860, 1988. [26](#)
- SERFLING, R. J. *Approximation theorems of mathematical statistics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 162. [22](#)
- SINGH, V. P. On application of the Weibull distribution in hydrology. *Water Resources Management*, Springer, v. 1, n. 1, p. 33–43, 1987. [1](#)
- STUART, A. et al. *Kendall's advanced theory of statistics*. [S.l.]: Wiley, 1994. [12](#)
- TISON, C. et al. A new statistical model for Markovian classification of urban areas in high-resolution sar images. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 42, n. 10, p. 2046–2057, 2004. [12](#), [19](#)
- TUNG, Y.-K. Mellin transform applied to uncertainty analysis in hydrology/hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 5, p. 659–674, 1990. [2](#)
- VIVEROS, R.; BALAKRISHNAN, N. Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics*, v. 36, p. 84–91, 1994. [1](#)
- VOGEL, R. M.; FENNESSEY, N. M. L moment diagrams should replace product moment distribution. *Water resources research*, v. 29, p. 1745–1752, 1993. [1](#)
- WANG, B. X.; WANG, X. K.; YU, K. Inference on the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 46, n. 5, p. 2079–2090, 2017. [3](#)
- WANG, Q. Estimation of the GEV distribution from censored samples by method of partial probability weighted moments. *Journal of hydrology*, Elsevier, v. 120, n. 1-4, p. 103–114, 1990. [15](#)
- WANG, Q. Unbiased estimation of probability weighted moments and partial probability weighted moments from systematic and historical flood information and their application to estimating the GEV distribution. *Journal of hydrology*, Elsevier, v. 120, n. 1-4, p. 115–124, 1990. [15](#)
- WANG, Q. Using partial probability weighted moments to fit the extreme value distributions to censored samples. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 32, n. 6, p. 1767–1771, 1996. [15](#)

WHALEN, T. M.; SAVAGE, G. T.; JEONG, G. D. An evaluation of the self-determined probability-weighted moment method for estimating extreme wind speeds. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 92, p. 219–239, 2004. [10](#)

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, v. 6, p. 344–362, 2009. [1](#)



# APÊNDICE A –

Neste apêndice, fornecemos as provas para as Proposições 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, e 4.1.4.

## A.1 Distribuição Kw-Weibull

### A.1.1 Log-verossimilhança

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) = & n \log(a) + n \log(\alpha) - n \alpha \log(\lambda) + (\alpha - 1) \sum_{r=1}^n \log(x_r) - \lambda^{-\alpha} \sum_{r=1}^n (x_r)^\alpha + \\ & (a - 1) \sum_{r=1}^n \log \left[ 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{x_r}{\lambda} \right)^\alpha \right\} \right]. \end{aligned}$$

Seja  $u_r = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{x_r}{\lambda} \right)^\alpha \right\}$ .

### A.1.2 Vetor escore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - n \log(\lambda) + \sum_{r=1}^n \log(x_r) + \sum_{r=1}^n \log(1 - u_r) \log \left( \frac{x_r}{\lambda} \right) \\ &\quad - (a - 1) \sum_{r=1}^n \frac{(1 - u_r)}{u_r} \log(1 - u_r) \log \left( \frac{x_r}{\lambda} \right), \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} &= -\frac{n\alpha}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{r=1}^n \log(1 - u_r) + \frac{(a - 1)\alpha}{\lambda} \sum_{r=1}^n \frac{\log(1 - u_r)(1 - u_r)}{u_r}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{n}{a} + \sum_{r=1}^n u_r. \end{aligned}$$

### A.1.3 Funções $g_2(\boldsymbol{\theta})$ e $g_3(\boldsymbol{\theta})$

$$g_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) \quad \text{e} \quad g_3(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1).$$

### A.1.4 Matriz de Informação Observada e sua inversa

$$\mathbf{H}_{\text{KwW}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top \partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \text{U}_{\alpha\alpha} & \text{U}_{\alpha\lambda} & \text{U}_{\alpha a} \\ \text{U}_{\lambda\alpha} & \text{U}_{\lambda\lambda} & \text{U}_{\lambda a} \\ \text{U}_{a\alpha} & \text{U}_{a\lambda} & \text{U}_{aa} \end{bmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha} &= \frac{n}{\alpha^2} - \sum_{r=1}^n \log(1-u_r) \log^2\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) \\
&\quad + (a-1) \sum_{r=1}^n \frac{\log(1-u_r)(1-u_r) \log^2\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) [u_r + \log(1-u_r)]}{(u_r)^2}, \\
U_{\alpha\lambda} = U_{\lambda\alpha} &= \frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{r=1}^n \left[ \log(1-u_r) + \alpha \log(1-u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) \right] \\
&\quad - (a-1) \sum_{r=1}^n \frac{\left[ \alpha(1-u_r) \log^2(1-u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) + \alpha(1-u_r) \log(1-u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) \right]}{\lambda u_r} \\
&\quad - (a-1) \sum_{r=1}^n \frac{\alpha \log^2(1-u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) (1-u_r)^2}{\lambda (u_r)^2}, \\
U_{\alpha a} = U_{a\alpha} &= \sum_{r=1}^n \frac{\log(1-u_r)(1-u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right)}{u_r}, \\
U_{\lambda\lambda} &= -\frac{n\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+2}} \sum_{r=1}^n x_r^\alpha - (a-1) \sum_{r=1}^n \frac{\alpha x_r^2 (1-u_r)(-x_r u_r - u_r + \alpha x_r^\alpha \lambda^{-\alpha})}{\lambda^{\alpha+1} (u_r)^2}, \\
U_{\lambda a} = U_{a\lambda} &= -\frac{\alpha}{\lambda} \sum_{r=1}^n \frac{\log(1-u_r)(1-u_r)}{u_r}, \\
U_{aa} &= \frac{n}{a^2}.
\end{aligned}$$

Se o determinante  $|\mathbf{H}_{\text{KwW}}| \neq 0$ , a matriz de covariância assintótica é dada por  $\Sigma_{\text{KwW}} \approx \mathbf{H}_{\text{KwW}}^{-1}$ , onde a inversão matricial usual é aplicada (HARVILLE, 1997; RENCHER; SCHALJE, 2008); caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

### A.1.5 Matriz de log-cumulantes

$$\mathbf{J}_{\text{KwW}} = - \begin{bmatrix} \frac{2}{\alpha^3} \psi^{(1)}(1) & \frac{3}{\alpha^4} \psi^{(2)}(1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### A.1.6 Matriz de covariância assintótica e sua inversa

$$\mathbf{K}_{\text{KwW}} = \left( \frac{U_{\alpha\alpha} U_{aa} - U_{\lambda a}^2}{\alpha^8 |\mathbf{H}_{\text{KwW}}|} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4\alpha^2 \psi^{(1)}(1)^2 & 6\alpha \psi^{(1)}(1) \psi^{(2)}(1) \\ 6\alpha \psi^{(1)}(1) \psi^{(2)}(1) & 9\psi^{(2)}(1)^2 \end{bmatrix},$$

onde

$$|\mathbf{H}_{\text{KwW}}| = U_{\alpha\alpha}(U_{\lambda\lambda}U_{aa} - U_{\lambda a}^2) + U_{\alpha\lambda}(U_{\alpha a}U_{\lambda a} - U_{\alpha\lambda}U_{aa}) + U_{\alpha a}(U_{\alpha\lambda}U_{\lambda a} - U_{\alpha a}U_{\lambda\lambda}).$$

Como  $\mathbf{K}_{\text{KwW}}$  é singular, a inversa generalizada de Moore-Penrose foi calculada (RAO et al., 2008, p. 508):

$$\mathbf{K}_{\text{KwW}}^{-1} = \left( \frac{\alpha^6 |\mathbf{H}_{\text{KwW}}|}{U_{\alpha\alpha}U_{aa} - U_{\lambda a}^2} \right) \begin{bmatrix} (2\psi^{(1)}(1))^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### A.1.7 Estatística $T^2$ de Hotelling

Portanto, obtemos:

$$T_{\text{KwW}}^2 = \frac{n\hat{\alpha}^6}{4} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 \left( \frac{|\widehat{\mathbf{H}}_{\text{KwW}}|}{U_{\alpha\alpha}U_{aa} - U_{\lambda a}^2} \right).$$

## A.2 Distribuição Kw-Fréchet

### A.2.1 Log-verossimilhança

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(\alpha) + n \alpha \log(\lambda) + n \log(a) - (\alpha + 1) \sum_{r=1}^n \log(x_r) - a \sum_{r=1}^n \left( \frac{\lambda}{x_r} \right)^\alpha.$$

### A.2.2 Vetor escore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n \log(\lambda) - \sum_{r=1}^n \log(x_r) - a \sum_{r=1}^n \left( \frac{\lambda}{x_r} \right)^\alpha \log \left( \frac{\lambda}{x_r} \right), \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} &= \frac{n\alpha}{\lambda} - a \alpha \lambda^{\alpha-1} \sum_{r=1}^n x_r^{-\alpha}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{n}{a} - \lambda^\alpha \sum_{r=1}^n x_r^{-\alpha}. \end{aligned}$$

### A.2.3 Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$

$$g_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) \quad \text{e} \quad g_3(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1).$$

### A.2.4 Matriz de Informação Observada e sua inversa

$$\mathbf{H}_{\text{KwF}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top \partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\lambda} & U_{\alpha a} \\ U_{\lambda\alpha} & U_{\lambda\lambda} & U_{\lambda a} \\ U_{a\alpha} & U_{a\lambda} & U_{aa} \end{bmatrix},$$

onde  $U_{\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha^2} + a\xi_2^{\text{KwF}}$ ,  $U_{\alpha\lambda} = U_{\lambda\alpha} = \frac{1}{\lambda}(a\xi_3^{\text{KwF}} - n)$ ,  $U_{\alpha a} = U_{a\alpha} = \xi_1^{\text{KwF}}$ ,  $U_{\lambda\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} [n\alpha + a\alpha(\alpha - 1)\xi_0^{\text{KwF}}]$ ,  $U_{\lambda a} = U_{a\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}\xi_0^{\text{KwF}}$ ,  $U_{aa} = \frac{n}{a^2}$ ,  $\xi_s^{\text{KwF}} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\lambda}{x_r}\right)^\alpha \log^s \left(\frac{\lambda}{x_r}\right)$  com  $s = 0, 1, 2$ , e  $\xi_3^{\text{KwF}} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\lambda}{x_r}\right)^\alpha \left[\log \left(\frac{\lambda}{x_r}\right)^\alpha + 1\right]$ .

Se o determinante  $|\mathbf{H}_{\text{KwF}}| \neq 0$ , a matriz de covariância assintótica é dada por  $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{KwF}} \approx \mathbf{H}_{\text{KwF}}^{-1}$ , onde a inversão matricial usual é aplicada (HARVILLE, 1997; RENCHER; SCHAALJE, 2008); caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

### A.2.5 Matriz de log-cumulantes

$$\mathbf{J}_{\text{KwF}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\alpha^3}\psi^{(1)}(1) & \frac{3}{\alpha^4}\psi^{(2)}(1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### A.2.6 Matriz de covariância assintótica e sua inversa

$$\mathbf{K}_{\text{KwF}} = \left( \frac{U_{\alpha\alpha}U_{aa} - U_{\lambda a}^2}{\alpha^8 |\mathbf{H}_{\text{KwF}}|} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4\alpha^2\psi^{(1)}(1)^2 & -6\alpha\psi^{(1)}(1)\psi^{(2)}(1) \\ -6\alpha\psi^{(1)}(1)\psi^{(2)}(1) & 9\psi^{(2)}(1)^2 \end{bmatrix},$$

onde

$$|\mathbf{H}_{\text{KwF}}| = U_{\alpha\alpha}(U_{\lambda\lambda}U_{aa} - U_{\lambda a}^2) + U_{\alpha\lambda}(U_{aa}U_{\lambda a} - U_{\alpha\lambda}U_{aa}) + U_{\alpha a}(U_{\alpha\lambda}U_{\lambda a} - U_{\alpha a}U_{\lambda\lambda}).$$

Como  $\mathbf{K}_{\text{KwF}}$  é singular, a inversa generalizada de Moore-Penrose foi calculada (RAO et al., 2008, p. 508):

$$\mathbf{K}_{\text{KwF}}^{-1} = \left( \frac{\alpha^6 |\mathbf{H}_{\text{KwF}}|}{U_{\alpha\alpha}U_{aa} - U_{\lambda a}^2} \right) \begin{bmatrix} (2\psi^{(1)}(1))^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## A.2.7 Estatística $T^2$ de Hotelling

Portanto, obtemos:

$$T_{\text{KwF}}^2 = \frac{n\hat{\alpha}^6}{4} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 \left( \frac{|\widehat{\mathbf{H}}_{\text{KwF}}|}{U_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}U_{aa} - U_{\hat{\lambda}a}^2} \right).$$

## A.3 Distribuição Kw-Log-logística

### A.3.1 Log-verossimilhança

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(a) + n \log(\alpha) + n\alpha \log(\lambda) - (\alpha + 1) \sum_{r=1}^n \log(x_r) - (a + 1) \sum_{r=1}^n \log \left[ 1 + \left( \frac{x_r}{\lambda} \right)^{-\alpha} \right].$$

Seja  $u_r = 1 + \left( \frac{x_r}{\lambda} \right)^{-\alpha}$ .

### A.3.2 Vetor escore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n \log(\lambda) - \sum_{r=1}^n \log(x_r) - (a + 1) \sum_{r=1}^n \frac{(1 - u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right)}{u_r}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} &= \frac{n\alpha}{\lambda} - \alpha(a + 1) \sum_{r=1}^n \frac{(u_r - 1)}{\lambda u_r}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{n}{a} - \sum_{r=1}^n \log(u_r). \end{aligned}$$

### A.3.3 Funções $g_2(\boldsymbol{\theta})$ e $g_3(\boldsymbol{\theta})$

$$g_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\psi^{(1)}(a) + \psi^{(1)}(1)}{\alpha^2} \quad \text{e} \quad g_3(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\psi^{(2)}(a) - \psi^{(2)}(1)}{\alpha^3}.$$

### A.3.4 Matriz de Informação Observada e sua inversa

$$\mathbf{H}_{\text{KwLL}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top \partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\lambda} & U_{\alpha a} \\ U_{\lambda\alpha} & U_{\lambda\lambda} & U_{\lambda a} \\ U_{a\alpha} & U_{a\lambda} & U_{aa} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha} &= \frac{n}{\alpha^2} + (a+1) \sum_{r=1}^n \log^2\left(\frac{x_r}{\lambda}\right) \frac{(u_r-1)}{(u_r)^2}, \\
U_{\alpha\lambda} = U_{\lambda\alpha} &= -\frac{n}{\lambda} + (a+1) \sum_{r=1}^n \left[ \frac{((u_r)^2 - 1) \log(u_r - 1) + u_r(u_r - 1)}{\lambda(u_r)^2} \right], \\
U_{\alpha a} = U_{a\alpha} &= \sum_{r=1}^n \frac{(1 - u_r) \log\left(\frac{x_r}{\lambda}\right)}{u_r}, \\
U_{\lambda\lambda} &= \frac{n\alpha}{\lambda^2} - (a+1)\alpha \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\alpha x_r^{-\alpha}(u_r - 1) + (1 - \alpha)\lambda^{-\alpha}u_r(u_r - 1)}{\lambda^{(2-\alpha)}(u_r)^2} \right], \\
U_{\lambda a} = U_{a\lambda} &= \sum_{r=1}^n \frac{\alpha(u_r - 1)}{\lambda u_r}, \\
U_{aa} &= \frac{n}{a^2}.
\end{aligned}$$

Se o determinante  $|\mathbf{H}_{\text{KwLL}}| \neq 0$ , a matriz de covariância assintótica é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{KwLL}} \approx \frac{1}{|\mathbf{H}_{\text{KwLL}}|} \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha}^* & U_{\alpha\lambda}^* & U_{\alpha a}^* \\ U_{\lambda\alpha}^* & U_{\lambda\lambda}^* & U_{\lambda a}^* \\ U_{a\alpha}^* & U_{a\lambda}^* & U_{aa}^* \end{bmatrix},$$

com  $U_{\alpha\alpha}^* = U_{\lambda\lambda}U_{aa} - U_{\lambda a}^2$ ,  $U_{\alpha\lambda}^* = U_{\lambda\alpha}^* = U_{\alpha a}U_{\lambda a} - U_{\alpha\alpha}U_{\lambda\lambda}$ ,  $U_{\alpha a}^* = U_{a\alpha}^* = U_{\alpha\lambda}U_{\lambda a} - U_{\alpha\alpha}U_{\lambda\lambda}$ ,  $U_{\lambda\lambda}^* = U_{\alpha\alpha}U_{aa} - U_{\alpha a}^2$ ,  $U_{\lambda a}^* = U_{a\lambda}^* = U_{\alpha\lambda}U_{\alpha a} - U_{\alpha\alpha}U_{\lambda a}$ ,  $U_{aa}^* = U_{\alpha\alpha}U_{\lambda\lambda} - U_{\alpha\lambda}^2$ ; caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

### A.3.5 Matriz de log-cumulantes

$$\mathbf{J}_{\text{KwLL}} = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
J_{12} &= -\frac{2}{\alpha^3} \{\psi^{(1)}(a) + \psi^{(1)}(1)\}, \\
J_{22} &= J_{23} = 0, \\
J_{32} &= \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(2)}(a), \quad J_{33} = \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(3)}(a), \\
J_{13} &= -\frac{3}{\alpha^4} \{\psi^{(2)}(a) - \psi^{(2)}(1)\}.
\end{aligned}$$

### A.3.6 Matriz de covariância assintótica e sua inversa

$$\mathbf{K}_{\text{KwLL}} = \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{23} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= (J_{12})^2 U_{\alpha\alpha}^* + 2J_{12}J_{32}U_{\alpha a}^* + (J_{32})^2 U_{aa}^*, \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= J_{33}(J_{32}U_{aa}^* + J_{12}U_{\alpha a}^*) + J_{13}(J_{12}U_{\alpha\alpha}^* + J_{32}U_{aa}^*), \\ \delta_{33} &= (J_{13})^2 U_{\alpha\alpha}^* + 2J_{13}J_{33}U_{\alpha a}^* + (J_{33})^2 U_{aa}^*. \end{aligned}$$

Se  $\delta_{22}\delta_{33} > \delta_{23}^2$  e  $|\mathbf{H}_{\text{KwLL}}| \neq 0$ , então sua inversa é dada por

$$\mathbf{K}_{\text{KwLL}}^{-1} = \frac{1}{\delta_{22}\delta_{33} - (\delta_{23})^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

caso contrário, aplicamos a inversa de Moore-Penrose (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

### A.3.7 Estatística $T^2$ de Hotelling

A estatística  $T_{\text{KwLL}}^2$  é dada por:

$$T_{\text{KwLL}}^2 = \frac{n}{\hat{\delta}_{22}\hat{\delta}_{33} - (\hat{\delta}_{23})^2} \left[ \hat{\delta}_{33} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2)^2 + \hat{\delta}_{22} (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23} (\hat{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2) (\hat{\kappa}_3 - \tilde{\kappa}_3) \right].$$

## A.4 Distribuição Kumaraswamy

### A.4.1 Log-verossimilhança

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(a) + n \log(b) + (a-1) \sum_{r=1}^n \log(x_r) + (b-1) \sum_{r=1}^n \log(1-x_r^a).$$

### A.4.2 Vetor escore

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \log(x_r) - (b-1) \sum_{r=1}^n \frac{x_r^a \log(x_r)}{1-x_r^a}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial b} &= \frac{n}{b} + \sum_{r=1}^n \log(1-x_r^a). \end{aligned}$$

### A.4.3 Funções $g_2(\theta)$ e $g_3(\theta)$

$$g_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\psi^{(1)}(1) - \psi^{(1)}(b+1)}{a^2} \quad \text{e} \quad g_3(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\psi^{(2)}(1) - \psi^{(2)}(b+1)}{a^3}.$$

### A.4.4 Matriz de Informação Observada e sua inversa

$$\mathbf{H}_{\text{Kw}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top \partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} \\ U_{ba} & U_{bb} \end{bmatrix},$$

onde  $U_{aa} = \frac{n}{a^2} + (b-1) \sum_{r=1}^n \frac{x_r^a \log^2(x_r)}{(1-x_r^a)^2}$ ,  $U_{ab} = U_{ba} = \sum_{r=1}^n \frac{x_r^a \log(x_r)}{(1-x_r^a)}$ , e  $U_{bb} = \frac{n}{b^2}$ . Se o determinante  $|\mathbf{H}_{\text{Kw}}| \neq 0$ , a matriz de covariância assintótica é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Kw}} \approx \frac{1}{|\mathbf{H}_{\text{Kw}}|} \begin{bmatrix} U_{bb} & -U_{ab} \\ -U_{ba} & U_{aa} \end{bmatrix}.$$

Caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose ([RAO et al., 2008](#); [SEBER, 2007](#)).

### A.4.5 Matriz de log-cumulantes

$$\mathbf{J}_{\text{Kw}} = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} J_{12} &= \frac{2}{a^3} \{ \psi^{(1)}(b+1) - \psi^{(1)}(1) \}, \\ J_{22} &= -\frac{\psi^{(2)}(b+1)}{a^2}, \\ J_{13} &= \frac{3}{a^4} \{ \psi^{(2)}(b+1) - \psi^{(2)}(1) \}, \\ J_{23} &= -\frac{\psi^{(3)}(b+1)}{a^3}. \end{aligned}$$

### A.4.6 Matriz de covariância assintótica e sua inversa

$$\mathbf{K}_{\text{Kw}} = \frac{1}{|\mathbf{H}_{\text{Kw}}|} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{23} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$



onde

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= (J_{12})^2 U_{bb} - 2J_{12}J_{22}U_{ab} + (J_{22})^2 U_{aa}, \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= J_{13}(J_{12}U_{bb} - J_{22}U_{ab}) + J_{23}(J_{22}U_{aa} - J_{12}U_{ab}), \\ \delta_{33} &= (J_{13})^2 U_{bb} - 2J_{13}J_{23}U_{ab} + (J_{23})^2 U_{aa}.\end{aligned}$$

Se  $\delta_{22}\delta_{33} > \delta_{23}^2$  e  $|\mathbf{H}_{\text{Kw}}| \neq 0$ , então a inversa é dada por

$$\mathbf{K}_{\text{Kw}}^{-1} = \frac{|\mathbf{H}_{\text{Kw}}|}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

#### A.4.7 Estatística $T^2$ de Hotelling

A estatística  $T_{\text{Kw}}^2$  é dada por:

$$T_{\text{Kw}}^2 = \frac{n|\widehat{\mathbf{H}}_{\text{Kw}}|}{\widehat{\delta}_{22}\widehat{\delta}_{33} - \widehat{\delta}_{23}^2} \left[ \widehat{\delta}_{33} (\widehat{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_2)^2 + \widehat{\delta}_{22} (\widehat{\kappa}_3 - \widetilde{\kappa}_3)^2 - 2\widehat{\delta}_{23} (\widehat{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_2) (\widehat{\kappa}_3 - \widetilde{\kappa}_3) \right].$$

# APÊNDICE B – Cálculo das estatísticas

De acordo com (4.3), para derivar as estatísticas buscadas para as distribuições, precisamos obter as seguintes quantidades: (i) As estimativas  $\hat{\kappa}_2$  e  $\hat{\kappa}_3$  e (ii)  $\hat{\mathbf{K}}^{-1}$ .

Com as saídas dos Algoritmos 1 e 2, as estatísticas buscadas podem ser obtidas de acordo com a manipulação algébrica feitas em (4.3).

---

**Algoritmo 1:** Cômputo de  $\hat{\kappa}_2$  e  $\hat{\kappa}_3$ 

---

**Passo 1.** Para os modelos considerados, tome  $\boldsymbol{\theta} = [a \ \alpha \ \lambda]^\top$ ;

**Passo 2.** Compute a função de log-verissimilhança  $\ell(\boldsymbol{\theta})$ ;

**Passo 3.** Derive as estimativas de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  pela igualdade do vetor escore a zero, que pode ser performado por meio de métodos numéricos iterativos, tais como o algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS);

**Passo 4.** Derive estimativas para  $\tilde{\kappa}_2$  e  $\tilde{\kappa}_3$  LC's baseada em  $\hat{\kappa}_2 = g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  e  $\hat{\kappa}_3 = g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ .

---

---

**Algoritmo 2:** Cômputo de  $\hat{\mathbf{K}}^{-1}$ 

---

**Passo 1.** Compute a matriz de LC's,  $\hat{\mathbf{J}}$ , de acordo com (4.1), considerando as funções  $g_2(\cdot)$  e  $g_3(\cdot)$ ;

**Passo 2.** Derive a matriz  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  de acordo com (4.2);

**Passo 3.** Compute:  $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{J}}^\top \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ ;

**Passo 4.** Se  $\hat{\mathbf{K}}$  é não-singular, compute  $\hat{\mathbf{K}}^{-1}$  sua inversa usual (HARVILLE, 1997; RENCHER; SCHAALJE, 2008); caso contrário, compute a inversa generalizada de  $\hat{\mathbf{K}}$  (RAO et al., 2008; SEBER, 2007).

---